2015年度　東北大学(文系)　数学解答・解説および配点予想

ここでは文系数学の満点を 200 点満点で考えています。学部学科によっては満点が異なる場合がありますが、採点基準は共通であると考えられます。

1　(50 点)【解答】

配点予想

$$\begin{cases} a_1 = 3 & \cdots ① \\ a_{n+1} > a_n & \cdots ② \\ a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) & \cdots ③ \end{cases}$$

（１）③より

$$a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+2}^2 = 3(a_{n+1} + a_{n+2}) \quad \cdots ④$$

式がかけて 5 点

③－④を計算すると,

$$a_n^2 - a_{n+2}^2 - 2(a_n a_{n+1} - a_{n+1}a_{n+2}) = 3(a_n - a_{n+2})$$

$$\therefore (a_n - a_{n+2})\{(a_n + a_{n+2}) - 2a_{n+1} - 3\} = 0$$

因数分解ができて 5 点

②より　$a_{n+2} > a_{n+1} > a_n$　なので

$a_n - a_{n+2} (\neq 0)$ で両辺を割ると,

よって

$$(a_n + a_{n+2}) - 2a_{n+1} - 3 = 0$$

$$\therefore a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3 \quad \cdots (答)$$

答が求められて 5 点

（２）（１）の関係式を変形すると,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 3$$

式変形できて 5 点

$b_n = a_{n+1} - a_n$ なので

$$b_{n+1} = b_n + 3$$

漸化式がかけて 5 点

ここで③に $n=1$ を代入し①も使って a_2 を求めておくと,

$$a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 = 3(a_1 + a_2)$$

$$3^2 - 2\cdot 3a_n + a_2^2 = 3(3 + a_2)$$

$$\therefore\ a_2^2 - 9a_2 = 0$$

$$a_2(a_2 - 9) = 0$$

①，②より　$a_2 > a_1 = 3$　なので

$$a_2 = 9$$

a_2 が求められて 5 点

したがって

$\{b_n\}$ は初項が $b_1 = a_2 - a_1 = 9 - 3 = 6$ で

公差が 3 の等差数列となるから,

$$b_n = 6 + (n-1)3$$

$$\therefore b_n = 3n + 3 \quad \cdots (答)$$

答が求められて 5 点

（３） $n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k+3) \\
&= 3 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \\
&= 3 + \frac{3}{2}(n-1)n + 3(n-1) \\
&= \frac{3}{2} n(n+1)
\end{aligned}
$$

$n=1$ のとき $\frac{3}{2}\cdot 1 \cdot (1+1) = 3 = a_1$ となり成立している.

よって $a_n = \frac{3}{2} n(n+1)$ ・・・(答)

式がかけて 5 点

計算ができて
5 点

答が求められて
5 点

$\boxed{1}$ 【解説】

（1） a_{n+2} を見てもう一本関係式をつくり，差をとることを思いつくことができれば，あとは設問の流れに従っていくだけである．

（2）ここでの式変形は基本的なのでしっかり得点してほしい． a_2 を丁寧に求めれば問題ないだろう．

（3）階差数列なので $n \geqq 2$ と $n=1$ のときの場合分けを確実にやればいい．

【角田幸二】

2 （50 点）【解答】

配点予想

（１） $\angle\mathrm{PAB} < 90°$ は常に成り立つ．
また, 図 1 より $\angle\mathrm{ABP} < 90°$ となるための条件は $t < 2$ である．同様に $\angle\mathrm{APB} < 90°$ となるための条件は $t > 2\cos 60° = 1$ である．
したがって，△ABP が鋭角三角形となるための条件は,

$1 < t < 2$　　・・・(答)

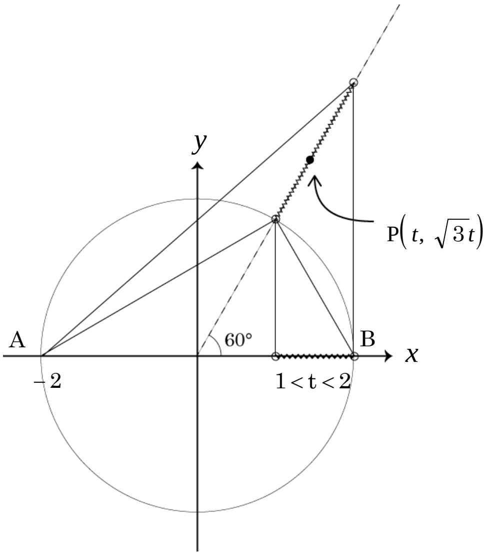


図 1

（１）10 点
t の上限と下限を求めて 5 点ずつ

（２）垂心を $\mathrm{H}(x,\ y)$ とおくと，点 H は点 P から辺 AB に引いた垂線上にあるから,

$$x = t$$

である．また $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \left(t+2,\ \sqrt{3}t\right)\cdot\left(x-2,\ y\right) =$

$\left(t+2,\ \sqrt{3}t\right)\cdot\left(t-2,\ y\right) = 0$ であるから，$\sqrt{3}ty = 4 - t^2$ すなわち,

$$y = \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$$

したがって，垂心 H の座標は,

$$\left(t,\ \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$$

・・・(答)

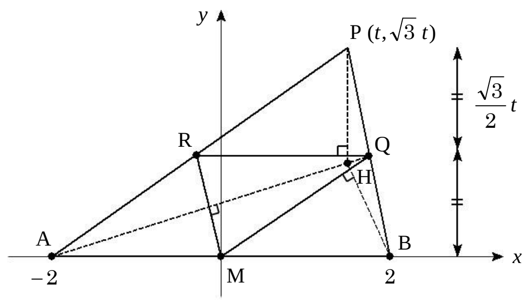


図 2

（２）15 点
垂心を求めるための条件式 (2 個) に対して
5 点ずつ

答えを求められて 5 点

（３） xy 平面を z 軸方向から見ながら，△ABP を問題文のように折って四面体を作ると, 三角形の三頂点は図 2 の点線のように移動して, △ABP の垂心で閉じる．したがって，△MRQ を底面としたときの四面体の高さを h とすると，図 3 より,

$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2 = \left(4-t^2\right) - \frac{\left(4-t^2\right)^2}{3t^2}$$

（３）25 点
四面体の高さを求めて 5 点

また，四面体の底面の面積Sは△ABPの面積の$\dfrac{1}{4}$であるから，辺AB を底辺としてSを求めると，

$$S^2=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}\,t\right)^2=\frac{3t^2}{4}$$

四面体の底面積を求めて5点

よって，四面体の体積Vは，

$$V^2=\frac{1}{9}S^2h^2=\frac{1}{9}\cdot\frac{3t^2}{4}\cdot\left\{\left(4-t^2\right)-\frac{\left(4-t^2\right)^2}{3t^2}\right\}=-\frac{1}{9}\left(t^4-5t^2+4\right)$$

四面体の体積を求めて5点

ここでV^2をtの関数とみて微分すると，

$$\frac{d}{dt}\left(V^2\right)=-\frac{1}{9}\left(4t^3-10t\right)=-\frac{2}{9}t\left(2t^2-5\right)$$

$$=-\frac{4}{9}t\left(t-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(t+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

であるから，V^2は区間$1<t<2$で増加して減少する．ゆえに，求める最大値は，

$$t=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\text{ のとき }V=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

・・・(答)

最大値を与えるtの値を求めて5点

最大値を求めて5点

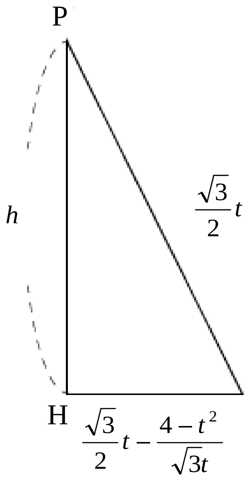


図3

$\boxed{2}$ 【解説】

有名な問題で，大学受験の問題としても取り上げられることが多いので，類題を解いたことのある学生もいるだろう．

（１）鋭角三角形とは全ての角が鋭角の三角形である．$\angle\mathrm{PAB} < 90°$ は自明であるので残りの角を調べればよい．図を丁寧に書くと，おのずと答えが見えてくる．$\angle\mathrm{ABP} = 90°$ となるのは点 P が原点中心半径 2 の円周上にあるときだ．なお，（１）の条件は，（３）を解いたときに $V^2 > 0$ になる条件からも求められる．

（２）垂心 $\mathrm{H}\,(x,\ y)$ は点 $\mathrm{P}\,(t,\ \sqrt{3}t)$ から辺 AB に引いた垂線上にあるから，$x = t$ である．また $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} = 0$ の条件から y を t の式で表すことができる．

（３）問題文のようにして四面体を作る操作を z 軸方向から見ると，△ABP の三頂点は△ABP の垂心で閉じる．すなわち，四面体の頂点から底面△MRQ に引いた垂線の足は△ABP の垂心である．これが最大の着眼点だろう．四面体の問題は東北大でも何度か出題されたことがあるが，この種の発想を要求する問題もあった. この点に気付けば, 体積は単純に $\dfrac{1}{3}\cdot$(底面積)$\cdot$(高さ) で求められる. 実際には, 根号を避けるために 2 乗しておいた方が適切だろう. ここまでくれば, 微分して増減を調べ最大値を求めることは容易だ.

なお，一般に三辺の長さがそれぞれ $a,\ b,\ c$ である三角形△ABC を折ってできる四面体の体積 V は，

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{48\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+b^2-a^2)} \\ &= \frac{1}{24}abc\sqrt{\cos A\cos B\cos C} \end{aligned}$$

のような，ヘロンの公式と類似の式で求められる．

【角田幸二】

$\boxed{3}$ (50点)【解答】

	配点予想
（１） $p_1 \neq 0$ より，(∗)は２次方程式であるから，判別式 D が $D=(p_2)^2-4\cdot 2p_1\cdot 2p_3 \geqq 0$ ∴ $(p_2)^2 \geqq 16p_1p_3$ …①をみたせばよい．	7点
$p_2=1,\ 2,\ 3$ のときは①をみたす p_1，p_3 はない． $p_2=4$ のとき，$p_1p_3=1$ より，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$ $p_2=5$ のとき，$p_1p_3=1$ より，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$ $p_2=6$ のとき，$p_1p_3=1,\ 2$ より，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$	7点
ゆえに①をみたす p_1，p_2，p_3 の組は５組あるから，求める確率は $\dfrac{5}{6\times6\times6}=\dfrac{5}{216}$ …(答)	7点
（２）実数解をもたないから，$(p_2)^2<16p_1p_3$ …②をみたし，さらに	7点
２次方程式の解と係数の関係より，$\alpha\beta=\dfrac{2p_3}{2p_1}=1$ ∴ $p_1=p_3$ をみたす．	7点
$p_1=p_3=1$ のとき，$p_2=1,\ 2,\ 3$ のみであるが， $p_1=p_3=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のとき，$p_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ で成り立つ．	7点
これらは互いに排反であるから，求める確率は $\dfrac{3+5\times6}{6\times6\times6}=\dfrac{11}{72}$ …(答)	8点

$\boxed{3}$ 【解説】

2 次方程式の係数にサイコロの出た目を関係させることで一見戸惑うが，読んでいく内に一度はやったことのある不等式の絡んだ確率の典型問題であることに気付くであろう．

（1）設問に従って実数解条件をつくり，p_1，p_2，p_3 の関係式を眺めると，p_2 で場合分けをして丁寧に数え上げるだけである．

（2）解と係数の関係により，条件が多くなるものの数え上げるのは容易である．

【角田幸二】

$\boxed{4}$ （50 点）【解答】

配点予想

（１） $f'(t)=-12t^2+a+3=0$ のとき， $t^2=\dfrac{a+3}{12}$

$t\geqq 0$ より， $t=\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$

t の値が求められて 3 点

ここで， $\left(\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}\right)^2-1^2=\dfrac{a-9}{12}$ であるから

$0<a<9$ のとき， $\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}<1$ であり，

場合分けができて 3 点

$$\begin{aligned}M(a)&=f\left(\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)\\&=\sqrt{\frac{a+3}{12}}\left(-4\cdot\frac{a+3}{12}+a+3\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)\sqrt{a+3}\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗		↘	$a-1$

$M(a)$ が求められて 3 点

$a\geqq 9$ のとき， $1\leqq\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ であり

場合分けができて 3 点

$$\begin{aligned}M(a)&=f(1)\\&=a-1\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	↗	$a-1$

$M(a)$ が求められて 3 点

よって，

$$M(a)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{9}(a+3)\sqrt{a+3} & (0<a<9\text{ のとき})\\ a-1 & (a\geqq 9\text{ のとき})\end{cases}\quad\cdot\cdot\cdot\ (\text{答})$$

3 点

（２）題意より，

$$g(x)=M(x)^2=\begin{cases}\dfrac{1}{27}(x+3)^3 & (0<x<9\text{ のとき})\\ (x-1)^2 & (x\geqq 9\text{ のとき})\end{cases}$$

$0<x<9$ のとき，

$g'(x)=\dfrac{1}{9}(x+3)^2$ だから，点 $(s\,,\,g(s))$ における接線は

$$y=\frac{1}{9}(s+3)^2(x-s)+\frac{1}{27}(s+3)^3$$

接線が s で表せて 2 点

これが原点を通るから

$$0=\frac{1}{9}(s+3)^2(-s)+\frac{1}{27}(s+3)^3$$

原点を通る条件を入れられて 2 点

$s+3>0$ だから

$$0=-\frac{1}{9}s+\frac{1}{27}(s+3) \qquad \therefore\ s=\frac{3}{2}$$

s を求められて 2 点

このとき，接線の傾きは

$$\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}+3\right)^2=\frac{9}{4}$$

接線の傾きが求められて 2 点

$x\geqq 9$ のとき， $g'(x)=2(x-1)$ だから，点 $(s,g(s))$ における接線は

$$y=2(s-1)(x-s)+(s-1)^2$$

接線が s で表せて 2 点

これが原点を通るから

$$0=2(s-1)(-s)+(s-1)^2$$

原点を通る条件を入れられて 2 点

$s-1>0$ だから

$$0=-2s+(s-1) \qquad \therefore\ s=-1$$

$s>0$ より，これは適さない．

s の値の吟味ができて 2 点 2 点

よって， $s=\dfrac{3}{2}$, 接線の傾き $\dfrac{9}{4}$ ・・・(答)

（3） $k>0$ に注意し， k^2 を考えると，

$$k^2=\frac{M(a)^2}{a}=\frac{g(a)}{a}$$

2 乗できて 2 点

$a\neq 0$ に注意し，分母を払うと，

$$ak^2=g(a)$$

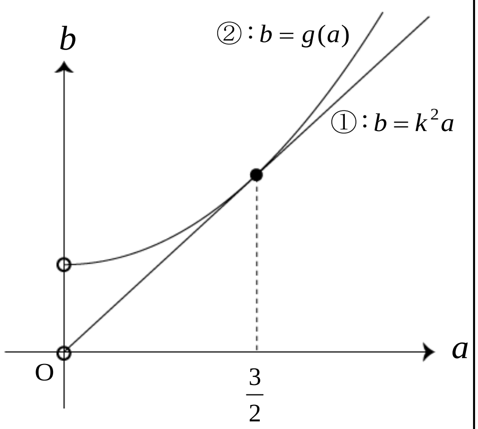
分母を払えて 2 点

この a についての方程式の解を, ab 平面上の曲線①, ②の共有点の a 座標だと考えることにする．②とも定義域は $a>0$ である．

$$\begin{cases} b=k^2a & \cdots ① \\ b=g(a) & \cdots ② \end{cases}$$

2 つのグラフが考えられて 2 点

①は原点を通り傾き k^2 の直線である．②は（2）で調べたとおり，下に凸, 単調増加の関数である. また, 定義域において， $g(a)$ ， $g'(a)$ ともに連続である. 以上のことを考慮すると，①，②が共有点を持ち，しかも①の傾きが最小になるのは, 右の図より，①，②が接するとき，すなわち，（2）より $a=\dfrac{3}{2}$ のときである．したがって， k の最小値は,



説明ができて 5 点

$$k=\sqrt{g'\left(\frac{3}{2}\right)}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2} \qquad \cdots(答)$$

k が求められて 5 点

$\boxed{4}$ 【解説】

（１） $f(t)$を微分して増減を調べると，最大値$M(a)$は２つの場合に分けられる．０＜a＜９なら極大値が$M(a)$である．９≦aなら$M(a)=f(1)$である．なお，$M(a)$は$a=9$で連続なので，場合分けの等号はどちらに入れてもよい．

（２） $y=g(x)$はxの整式となる．微分して$x=s$における接線を求め，原点を通る接線が存在する条件を求めればよい．解は１つしかない．なお$g'(x)$も$x=9$で連続になる． $y=g(x)$は定義域x＞０で単調増加，下に凸で滑らかな曲線だ．この事実は（３）で重要になる．

（３）発想力が要求される．（２）で$g(a)=M(a)^2$を考えているので，両辺を２乗して根号をはずすところまでは誰でも思いつく．しかし，分数関数を微分して増減を調べるのは楽ではないし，数Ⅲの範囲だ．ここでは，まず分母を払うべきだろう．方程式を２曲線の共有点の問題に還元する次のステップがこの問題の最大のヤマだ．これに気づけば，もう答えは見えている．（２）の結果をそのまま利用すればよい．（３）のほとんどは，問題を変形する作業である．実質的に計算は不要だ．

【角田幸二】