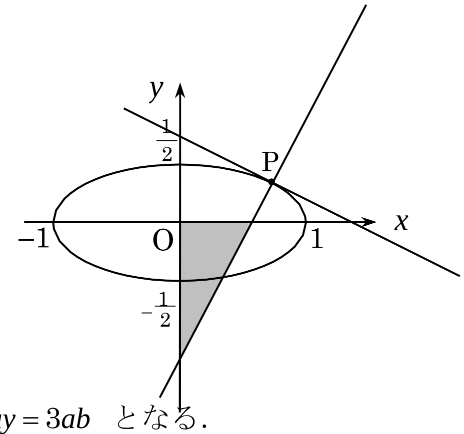
2015年度　東北大学（理系）数学解答・解説および配点予想

ここでは理系数学の満点を 300 点満点で考えています。学部学科によっては満点が異なる場合がありますが、採点基準は共通であると考えられます。

$\boxed{1}$ （50 点）【解答】



解答	配点予想
P$(a,\ b)$とおくと，$a>0$，$b>0$ で， $a^2+4b^2=1$ …① をみたす	2 点
題意の直線 l の式は，接線の公式より $ax+4by=1$	4 点
これより，直線 m の式は $4b(x-a)-a(y-b)=0$　∴ $4bx-ay=3ab$ となる．	5 点
よって，直線 m と x 軸との交点の x 座標は，$4bx=3ab$　∴ $x=\dfrac{3a}{4}$	4 点
また，y 軸との交点の y 座標は，$-ay=3ab$　∴ $y=-3b$	4 点
したがって，題意の三角形の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\left\|\dfrac{3a}{4}\right\|\left\|-3b\right\|=\dfrac{9ab}{8}$	5 点
ここで，$a^2>0$，$4b^2>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均)より， $a^2+4b^2\geqq 2\sqrt{a^2\cdot 4b^2}=4ab$	5 点
①より，　$1\geqq 4ab$　∴ $\dfrac{1}{4}\geqq ab$	6 点
ゆえに，$S=\dfrac{9ab}{8}\leqq\dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{32}$ となる．	6 点
等号成立条件は，①より $a^2=4b^2=\dfrac{1}{2}$　∴ $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	各 3 点
以上より，求める S の最大値は $\dfrac{9}{32}$ …(答) そのときの点 P の座標 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$	まとめて 3 点

$\boxed{1}$ 【解説】

数学Ⅲ（旧課程数学C）の２次曲線の定番問題である．楕円や双曲線の接線または法線と x 軸および y 軸（あるいは双曲線のときは漸近線）とで囲まれた三角形の面積の最大値・最小値を求める問題は入試頻出であり，デキる受験生ならば，相加平均・相乗平均の大小関係を用いることは初めから想定内である．間違っても数学Ⅲの微分などに頼らないようにしよう． いまさらだが，大切な基本であるから確認しておこう．

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}$ を相加平均（そうか），$\sqrt{ab}$ を相乗平均（そうじょう）という．

これら２式の間には，（相加平均）≧（相乗平均）という大小関係が成り立つから，両辺を２倍することにより，次の不等式が得られる．

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab} \qquad \text{（等号は } a=b \text{ のとき成り立つ）}$$

この不等式を用いると，

① 積 ab が一定のとき，和 $a+b$ の最小値が求められる

② 和 $a+b$ が一定のとき，積 ab の最大値が求められる

数学Ⅱの教科書レベルの問題では①の使い方をすることがほとんどだが，数学Ⅲの２次曲線の問題では②のような使い方をすることがたまにある．実は②の使い方は，２次関数の最大値を求める方法（平方完成）でも代用できるので，慣れていない人が多いかもしれない．

$S=\dfrac{9ab}{8}$ より，$S^2=\dfrac{9^2a^2b^2}{8^2}=\dfrac{9^2(1-4b^2)b^2}{8^2}$ （∵ ①より）

$$=\frac{9^2}{8^2}\left\{-4\left(b^2-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{16}\right\} \leqq \frac{9^2}{8^2}\cdot\frac{1}{16}$$

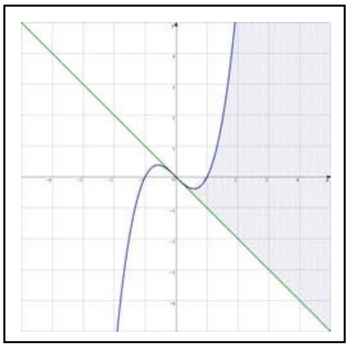
したがって，$S \leqq \dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{32}$ となる．（等号成立は $b^2=\dfrac{1}{8}$ のとき）

なお，最大値や最小値を求めるときは，等号成立条件を確認しなければならないことに注意しよう．等号が成立して初めて，最大値や最小値が確定するのである．

なお，養賢ゼミナール生はテストゼミ難関大数学Ⅲ第３回の問題２が同様の問題であるから，確認しておこう．

2 (50点)【解答】

配点予想



題意の領域Dは右図の斜線部分である．
ここで点P(a ， b)とおくと，領域D内にあるから，

$a>0$ かつ $a^3-a>b>-a$ …①

2点

をみたす．

(1) $y'=3x^2-1$ より，接点の x 座標を t とすると，
C に接する直線の方程式は， $y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$

3点

これが，点Pを通るから， $b=(3t^2-1)(a-t)+t^3-t$

$\therefore\ b=(3t^2-1)a-2t^3$ …②

3点

題意を示すには，この t の3次方程式②が異なる3つの実数解を もつことを示せばよい．右辺を $f(t)$ とおくと，

$f'(t)=6at-6t^2=6t(a-t)=0$ のとき， $t=0$ ， a である．

3点

$a>0$ より， $f(t)$ の増減は右の表のようになる．

増減表に5点

t	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	$-a$	↗	a^3-a	↘

ゆえに①より， $a^3-a>b>-a$ をみたすから，方程式②は異なる3実数解をもつので，Pを通り C に接する直線は3本存在する．

述べて3点

(証明終)

(2) ②より， $2t^3-3at^2+a+b=0$ となり，(1)より3実数解をもつから，
それらを α ， β ， γ とおくと，3次方程式の解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3a}{2},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{a+b}{2}\quad \cdots③$$

各2点

ここで，題意の直線の傾きの和が0となるから，

$$3\alpha^2-1+3\beta^2-1+3\gamma^2-1=3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)-3=0$$

3点

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\quad \cdots④$$

2点

また，傾きの積が0となるから，

$$\left(3\alpha^2-1\right)\left(3\beta^2-1\right)\left(3\gamma^2-1\right)$$

3点

$$=27\alpha^2\beta^2\gamma^2-9\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)+3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)-1$$

$$=27\alpha^2\beta^2\gamma^2-9\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)+2\qquad (\because ④)$$

$$=27\alpha^2\beta^2\gamma^2-9\left\{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\right\}+2$$

$$=27\alpha^2\beta^2\gamma^2+18\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)+2\qquad (\because ③)$$

$$=\frac{27(a+b)^2}{4}-\frac{27a(a+b)}{2}+2=0\quad \cdots⑤$$

5点

(【解答】は次のページに続きます)

配点予想

ここで③④より，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$1=\dfrac{9}{4}a^2$　∴ $a>0$ より，$a=\dfrac{2}{3}$　　3 点

また，⑤より，　$27(a+b)^2-36(a+b)+8=0$ となるから，

∴ $a+b=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{9}$　　3 点

ただし，①より　$-\dfrac{10}{27}>b>-\dfrac{2}{3}$ をみたすから，　$b=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　　3 点

以上より，求める点 P の座標は，P $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ …(答)　　3 点

$\boxed{2}$ 【解説】

数学Ⅱの範囲における３次曲線の接線の本数を考える問題で，入試頻出である（2010 年度センター数学ⅡＢでも出題されている）．考え方が間接的につながっていることが理解できていないと，何を証明すればよいのか戸惑うだろう．

接線が３本存在する

$\Updownarrow$（接点１個につき接線１本が対応するから）…(＊)

接点が３個存在する

$\Updownarrow$

接点の x 座標 t が３個存在する

$\Updownarrow$

t の３次方程式　$b=(3t^2-1)a-2t^3$　…②が異なる３個の実数解をもつ

$\Updownarrow$

直線 $y=b$ と３次曲線 $y=(3t^2-1)a-2t^3$ が異なる３個の交点をもつ

これらの考え方のつながりを理解しておくことが重要である．　このような問題は，定数分離をするのが一般的だが，この問題に関しては定数が a，b の２文字あ るので難度が高くなっている．そこで定数 b の方を分離して，直線 $y=b$ と文字係数 a を含む３次関 数 $f(t)=(3t^2-1)a-2t^3$ のグラフとの交点の個数を考えるとよい．（定数分離しない方法もある）（＊)のところは，数学Ⅲの範囲の曲線（３次曲線でない場合）のときは言及しなければならないこ とに注意しよう．

⑵では，３次方程式 $2t^3-3at^2+a+b=0$ の実数解（t の値）が α，β，γ であるが，直線の傾きは，$y'=3x^2-1$ であるから，それぞれ $3\alpha^2-1$，$3\beta^2-1$，$3\gamma^2-1$ であることに注意しよう．あとは，３次方程式の解と係数の関係および対称式を基本対称式で表す式変形を用いればよい．３変数の基本対称式は，$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$ であり，これらを用いてすべての対称式（α，β，γ を入れ替えても同じになる式）を表すことができる．よく用いられるのは次の２式である．

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right)+3\alpha\beta\gamma$$

これ以外でも，対称式ならば必ず基本対称式で表されることを知らないと確信をもって先に進めな い．なんとなく式変形を覚えているだけでは，途中で迷いが生じるかもしれない．

3 (50 点)【解答】

配点予想

(1) $p_1 \neq 0$ より，(∗)は 2 次方程式であるから，判別式 D が

$D=(p_2)^2-4\cdot 2p_1\cdot 2p_3 \geqq 0 \quad \therefore \ (p_2)^2 \geqq 16p_1p_3$ …①をみたせばよい．

5 点

$p_2=1$，2，3 のときは①をみたす p_1，p_3 はない．

$p_2=4$ のとき，$p_1p_3=1$ より，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

$p_2=5$ のとき，$p_1p_3=1$ より，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

$p_2=6$ のとき，$p_1p_3=1$，2 より，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

5 点

ゆえに①をみたす p_1，p_2，p_3 の組は 5 組あるから，求める確率は

$$\frac{5}{6\times 6\times 6}=\frac{5}{216} \quad \cdots(\text{答})$$

5 点

(2) 実数解をもたないから，$(p_2)^2<16p_1p_3$ …②をみたし，さらに

5 点

2 次方程式の解と係数の関係より，$\alpha\beta=\dfrac{2p_3}{2p_1}=1 \quad \therefore \ p_1=p_3$ をみたす．

5 点

$p_1=p_3=1$ のとき，$p_2=1$，2，3 のみであるが，

$p_1=p_3=2$，3，4，5，6 のとき，$p_2=1$，2，3，4，5，6 で成り立つ．

5 点

これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3+5\times 6}{6\times 6\times 6}=\frac{11}{72} \quad \cdots(\text{答})$$

5 点

(3) (2)と同様に，$(p_2)^2<16p_1p_3$ …②をみたし，さらに $\alpha\beta=\dfrac{2p_3}{2p_1}<1$ より

$p_1>p_3$ をみたす．

5 点

このとき $(p_1,\ p_3)$ の組は，${}_6C_2=15$ 組ある．

そのうち，$p_1=2$，$p_3=1$ のときは，$p_2=1$，2，3，4，5 であり，

その他の $(p_1,\ p_3)$ の組（14 組）に対しては，$p_1p_3 \geqq 3$ となるから，

$p_2=1$，2，3，4，5，6 のとき成り立ち，これらは互いに排反である．

5 点

ゆえに求める確率は，$\dfrac{5+14\times 6}{6\times 6\times 6}=\dfrac{89}{216} \quad \cdots(\text{答})$

5 点

$\boxed{3}$ 【解説】

2 次方程式の係数にサイコロの出た目を関係させることで一見戸惑うが，読んでいく内に一度はやったことのある不等式の絡んだ確率の典型問題であることに気付くであろう．

（1）設問に従って実数解条件をつくり，p_1，p_2，p_3 の関係式を眺めると，p_2 で場合分けをして丁寧に数え上げるだけである．

（2）解と係数の関係により，条件が多くなるものの数え上げるのは容易である．

（3）（2）と同様にやれば問題ないと思うが，抜けのないよう慎重にやる必要はある．

【角田幸二】

4 (50 点)【解答】

配点予想

与えられた 3 点を左から順に P，Q，R とすると，

$\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right)$，　$\overrightarrow{PR} = (\pi,\ 0)$　となるから，

三角形 PQR の面積 $A_n = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\pi}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a} - \dfrac{\pi}{2}\times 0\right| = \dfrac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$　である．　5 点

(1)　$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において，$0 \leqq \sin x \leqq 1$ であり，　1 点

$(2n\pi)^a \leqq x^a \leqq \{(2n+1)\pi\}^a$　より，$\dfrac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \dfrac{1}{x^a} \leqq \dfrac{1}{(2n\pi)^a}$　2 点

よって，$\dfrac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \dfrac{\sin x}{x^a} \leqq \dfrac{\sin x}{(2n\pi)^a}$　となるから，　3 点

各辺を区間$[\,2n\pi,\ (2n+1)\pi\,]$で定積分すると，

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx \leqq B_n \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}\,dx \quad \cdots ①$$
2 点

ここで，(右辺)$=\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}\,dx = \frac{1}{(2n\pi)^a}\Big[-\cos x\Big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = \frac{2}{(2n\pi)^a}$　3 点

また，(左辺)$=\dfrac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\Big[-\cos x\Big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = \dfrac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}$　となるから，　2 点

①より，$\dfrac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq B_n \leqq \dfrac{2}{(2n\pi)^a}$　は成り立つ．　(証明終)　述べて 2 点

(2)　(1)の結果より　$\dfrac{(2n\pi)^a}{2} \leqq \dfrac{1}{B_n} \leqq \dfrac{\{(2n+1)\pi\}^a}{2}$　となり，各辺に A_n をかけて

$$\frac{\pi}{4}\left\{\frac{2n\pi}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}^a \leqq \frac{A_n}{B_n} \leqq \frac{\pi}{4}\left\{\frac{(2n+1)\pi}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}^a$$
5 点

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left\{\frac{2n\pi}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}^a = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left\{\frac{2}{2+\frac{1}{2n}}\right\}^a = \frac{\pi}{4}$　となり，　3 点

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left\{\frac{(2n+1)\pi}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}^a = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left\{\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{2n}}\right\}^a = \frac{\pi}{4}$　となるから，　2 点

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \frac{\pi}{4}$　$\cdots$(答)　5 点

配点予想

(3)　$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において，$0 \leqq \sin^2 x \leqq 1$ であり，
(1)の①式と同様にして，次の式を得る．

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx \leqq C_n \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{(2n\pi)^a}\,dx$$

2 点

ここで，(右辺)$=\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{(2n\pi)^a}\,dx = \frac{1}{(2n\pi)^a}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$$= \frac{1}{2(2n\pi)^a}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = \frac{\pi}{2(2n\pi)^a}$$

2 点

また，(左辺)$=\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\,dx = \frac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a}$　となる．

2 点

したがって，$\left\{\dfrac{2n\pi}{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}\right\}^a \leqq \dfrac{A_n}{C_n} \leqq \left\{\dfrac{(2n+1)\pi}{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}\right\}^a$　が成り立つ．

2 点

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2n\pi}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}^a = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{2+\frac{1}{2n}}\right\}^a = 1$　となり，

2 点

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)\pi}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}^a = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{2n}}\right\}^a = 1$　となるから，

2 点

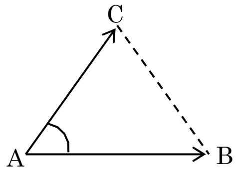
はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n} = 1$　…(答)

3 点

$\boxed{4}$ 【解説】

面積A_nを求めるときは，次の公式を用いるとよい．

$\overrightarrow{AB}=(a_1,\ a_2)$， $\overrightarrow{AC}=(b_1,\ b_2)$ のとき，$\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$



座標平面上で３頂点の座標がわかっていれば，この公式を使うことができる．丁寧に図を描いて考えているヒマはないので，とっとと公式を用いて求めよう．

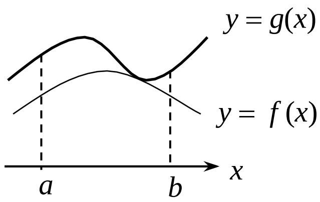
定積分を含む不等式を証明するときは，積分区間からスタートするのが定石であり，証明したらはさみうちの原理を用いて極限値を求めるのがお決まりのコースであるから，答案を書く量はやや煩雑になるが，数学Ⅲの問題にしては迷うところがないので難しくはない． なお，不等式と定積分に関しては次のことが重要である．

区間$[a,\ b]$において不等式$f(x)\leqq g(x)$が成り立っているとき，両辺を区間$[a,\ b]$で定積分しても大小関係は変わらない．

$f(x)\leqq g(x)$

⇓ 両辺を区間$[a,\ b]$で定積分する

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$ $\cdots(*)$



なお，不等式$(*)$の等号が成立するのは，恒等的に$f(x)=g(x)$のときだけである．恒等的に$f(x)=g(x)$とは，$f(x)$と$g(x)$が全く同じ関数（グラフが完全に一致）という意味であり，
一般的に等号はつかないが，問題文に等号が付いているときは付けたままにしておくとよい．
（養賢ゼミナール生は前期数学Ⅲテキスト第１０講の問題３を参照しよう）

同様の問題は，難関国公立大学の入試問題でよく出題されるが，今回の問題は2003 年度広島大学前期（ハイレベル理系数学演習第１２回）よりは難しく，1999 年度東京工業大後期よりは易しい．一般の参考書・問題集には極限値を求めるところまでは載っていないことが多いので，実際の難関大学の入試問題演習を通して練習するのが一番良い受験勉強の方法である．

$\boxed{5}$ （50 点）【解答】

配点予想

文系$\boxed{2}$と同一の問題ですので，そちらをご覧下さい

6 （50点）【解答】	配点予想
等差数列の和の公式より， $n=\dfrac{k(m+m+k-1)}{2}=mk+\dfrac{k(k-1)}{2}\cdots$①	3点
(1)　n が k-連続和であるとき，①をみたす自然数 m が存在し，	
$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=m+\dfrac{k-1}{2}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=m$ は整数であるから(A)は成り立つ．	3点
また， $2n=2mk+k(k-1)=(2m-1)k+k^2>k^2$ （$\because 2m-1>0$， $k\geqq 2$）	3点
となるから，(B)も成り立つ．	
逆に，条件(A)，(B)の両方が成り立つとき，	
$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=M$ をみたす整数 M が存在し，これを変形して	3点
$2n=(2M-1)k+k^2$ となるから， $2n>k^2$ より M は自然数である．	3点
さらに， $n=Mk+\dfrac{k(k-1)}{2}$ と変形できるので，	
$M=m$ とおくと①をみたすから， n は k-連続和である．	3点
（証明終）	
(2)　$n=2^f$ のとき，①より $2^f=mk+\dfrac{k(k-1)}{2}$ をみたす自然数 m が存在し，	2点
$2^{f+1}=2mk+k(k-1)$	
$\therefore\quad 2^{f+1}=k(k+2m-1)$ と変形できる．	2点
ここで，左辺は2のみを素因数にもつので，右辺も同様であるから，	
自然数 $k\geqq 2$ が存在すると仮定すると， $k=2^N$ と表せる．（N は自然数）	3点
このとき k は偶数より， $k+2m-1$ は3以上の奇数となるから，右辺も	
2のみを素因数にもつことに反する．ゆえに， n が k-連続和であるような2以上の自然数 k は存在しない．　（証明終）	述べて5点
(3)　$n=p^f$ のとき，①より $p^f=mk+\dfrac{k(k-1)}{2}$ をみたす自然数 m が存在し，	
$\therefore\quad 2p^f=k(k+2m-1)$ …② と変形できる．	2点
また， k の値は条件(B)より， $2n=2p^f>k^2$ …③ をみたす．	2点
（i） f が偶数のとき，②かつ③をみたす k の値は	
k が偶数ならば， $k=2$， $2p$， $2p^2$， …， $2p^{\frac{f}{2}-1}$ の $\dfrac{f}{2}$ 個	2点
k が奇数ならば， $k=p$， p^2， p^3， …， $p^{\frac{f}{2}}$ の $\dfrac{f}{2}$ 個	2点
よって，求める k の個数は合わせて， $\dfrac{f}{2}+\dfrac{f}{2}=f$ 個となる．	2点

配点予想

（ⅱ） f が奇数のとき，②かつ③をみたす k の値は

k が偶数ならば，$k=2$，$2p$，$2p^2$，…，$2p^{\frac{f-1}{2}}$ の $\dfrac{f-1}{2}+1$ 個　2点

k が奇数ならば，$f=1$ のときは存在しないが，　1点

$f \geqq 3$ のときは，$k=p$，p^2，p^3，…，$p^{\frac{f-1}{2}}$ の $\dfrac{f-1}{2}$ 個　2点

（$f=1$ のときも 0 個となってみたす）　1点

よって，求める k の個数は合わせて，$\dfrac{f-1}{2}+1+\dfrac{f-1}{2}=f$ 個となる．　2点

以上より，すべての自然数 f に対して，題意の条件をみたす 2 以上の 自然数 k の個数は f 個である．…(答)　2点

$\boxed{6}$ 【解説】

(1)は同値であることを示せ，と指示があるので，必要条件である証明と，その逆の十分条件である ことの証明のいずれも示すことが大切だ.

n が k -連続和である　$\Leftrightarrow$　条件(A)(B)の両方が成り立つ

(3)では，$2p^f = k\left(k+2m-1\right)\cdots$②の右辺の k と $k+2m-1$ の値の組を考えるのだが，条件(B)をみたしていれば，k より大きい自然数 $k+2m-1$ が存在するので，k の個数のみに着目するだけでよい.

n が k -連続和であるとき，条件(B)　$2n > k^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2mk + k(k-1) > k^2$

$$\Leftrightarrow \quad k + 2m - 1 > k$$

整数問題を解くための洞察力とは，等式を上の②のような適切な形に変形して（因数分解することが多い），左辺と右辺が等しいことから，それぞれの文字（あるいは文字式）の性質を特定していくことである.

新課程の数学Ａに整数問題が導入されたが，いくら教科書で履修したとはいえ，入試レベルの整数 問題が解けるようになるためにはかなりの量の入試問題演習が必要であるから，教科書では習って いない既卒生が特に不利になるとは思えない．国公立大学理系学部（多くは医学部）で出題される ようなハイレベルな整数問題を解き慣れている人でなければ，なかなか歯が立たないだろう．教科 書で習うような整数問題はせいぜい文系学部レベル（あるいは新課程センター数学ＩＡレベル）な ので，今回の問題は完全に理系レベルといってよい．東北大学理系学部では，今回のような本格的 な整数問題を出題することが近年なかったので，整数問題を疎かにしてきた受験生は痛い目にあっ たに違いない．東北大学でも医学部医学科に合格するような受験生は，東北大学の過去問は当然早 い時期に研究済みで，センター試験後は入試直前まで東京大学の問題を解いて研究しているものだ．　東京大学理系の整数問題に慣れていれば，今回の東北大学の問題は比較的素直な誘導で解きやすい と感じるだろう．他の学部を目指している人でもせめて(2)までは示せるような力をつけておきたい ものである．今後もこのような本格的な整数問題が出題されると予想されるので，ライバルに差を つけて合格を勝ち取りたいと思っている受験生は，さまざまなタイプの整数問題にも積極的に取り 組んでおくべきだろう.