数　　学

《解答にさいしての注意》
1. **1** は必須問題である。全員が解答すること。
2. **2** ～ **6** は選択問題である。２つを選んで解答し，選択した問題番号は解答用紙に明示すること。
3. 解答用紙には，答えだけでなく途中の計算も書くこと。

（必須問題）

1　次の問いに答えよ。

(i)　方程式 $|x+1|-|x-1|=x$ を解け。

(ii)　不等式 $x^2+14x-13<0$ の整数解の個数を求めよ。

(iii)　命題「x は有理数かつ y は無理数 $\Longrightarrow$ xy は無理数」は偽である。このことを示す反例をあげよ。

(iv)　三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$，$\mathrm{AB}=7$，$\mathrm{AC}=5$ であるとき，$\sin\angle\mathrm{ABC}$ の値を求めよ。

（選択問題）

2　2 次関数 $f(x)=-x^2+2\sqrt{2}\,x+1$ について，次の問いに答えよ。

(i)　$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(ii)　$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，関数 $y=|f(x)|-3$ の最大値と最小値を求めよ。

3 実数 a, b が $a > b > 1$ と $\log_a b + \log_b a = 3$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(i) $(\log_a b)(\log_b a)$ の値を求めよ。

(ii) $\log_a b - \log_b a$ の値を求めよ。

4 関数 $f(x) = x^3 - x^2$ について，次の問いに答えよ。

(i) x が a から b まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ。ただし，$a < b$ とする。

(ii) x が 1 から 2 まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率が，$x = c$ における微分係数 $f'(c)$ に一致するとき，c の値を求めよ。ただし，$1 < c < 2$ とする。

5 1 辺の長さ 4 の立方体 ABCD-EFGH において，辺 EH 上の点 P を EP : PH = 1 : 3 となるようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(i) $\angle \mathrm{APF} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(ii) 三角形 APF の面積 S を求めよ。

(iii) 四面体 AEFP の頂点 E から平面 AFP に下ろした垂線 EI の長さを求めよ。

6 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(i) すべての自然数 n について，$a_n \geqq \sqrt{2}$ を示せ。

(ii) すべての自然数 n について，$a_{n+1} \leqq a_n$ を示せ。

２０２２年度　東北学院大学　数学　解答速報（２月１日実施分）

全学部型（文・経済・法・教養学部の全学科・全コース）

【必須問題】

1（ｉ）$x=-2,0,2$　（ⅱ）15 個　（ⅲ）反例　$x=0, y=\sqrt{2}$

（ⅳ）$\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$

【選択問題】

2（ｉ）$x=\sqrt{2}$ のとき最大値 3，$x=-1$ のとき最小値 $-2\sqrt{2}$

（ⅱ）$x=\sqrt{2}$ のとき最大値 0，$x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ のとき最小値 -3

3（ｉ）1　（ⅱ）$-\sqrt{5}$

4（ｉ）$a^2+b^2+ab-a-b$　（ⅱ）$c=\dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$

5（ｉ）$\cos\theta=\dfrac{1}{17}$　（ⅱ）$S=6\sqrt{2}$　（ⅲ）$\mathrm{EI}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

6　$a_n \geqq \sqrt{2}$ ……①

（ｉ）数学的帰納法によって示す．

（Ⅰ）$n=1$ のとき，$a_1=2\geqq\sqrt{2}$ で，①は成り立つ．

（Ⅱ）$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$a_{k+1}=\dfrac{1}{2}a_k+\dfrac{1}{a_k}$ であるから

$$a_{k+1}-\sqrt{2}=\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{a_k}\right)-\sqrt{2}$$

$$=\frac{{a_k}^2+2-2\sqrt{2}a_k}{2a_k}$$

$$=\frac{\left(a_k-\sqrt{2}\right)^2}{2a_k}\geqq 0$$

$$\therefore \quad a_{k+1} \geqq \sqrt{2}$$

よって，$n=k+1$のときも成り立つ．

（Ⅰ），（Ⅱ）より，すべての自然数nについて，$a_n \geqq \sqrt{2}$ である．

（証明終わり）

（ⅱ）　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{a_n}$ であるから

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{a_n}$$

$$=\frac{a_n^{\ 2}-2}{2a_n}$$

$$=\frac{\left(a_n+\sqrt{2}\right)\left(a_n-\sqrt{2}\right)}{2a_n}$$

（ⅰ）より，$a_n-\sqrt{2} \geqq 0$ であるから

$$a_n-a_{n+1} \geqq 0 \qquad \therefore \quad a_{n+1} \leqq a_n$$

よって，すべての自然数nについて，$a_{n+1} \leqq a_n$ である．

（証明終わり）

【講評】

【必須問題】

1　＜小問集合：数学Ⅰ＞　基本的な良問である．

（ⅰ）＜絶対値を含む方程式：数学Ⅰ＞

絶対値が２つあるので，３つの場合分けをして絶対値をはずす．

（ⅱ）＜２次不等式の整数解の個数：数学Ⅰ＞

整数解は，$x=-14, -13, \cdots\cdots, -1, 0$ である．

（ⅲ）＜偽の命題の反例：数学Ⅰ＞

$x=0$ に注意したい．

（ⅳ）＜図形の計量：数学Ⅰ＞

まず余弦定理でBCを求め，次に求めたBCの値を使って正弦定理を用いる．

【選択問題】

2　＜2次関数：数学Ⅰ＞

（ⅰ）2次関数の最大・最小の基本問題である．

（ⅱ）$0 \leqq |f(x)| \leqq 3$ である．$|f(x)|$は，$x=\sqrt{2}$ で最大値3　，$x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ で最小値0をとる．

3　＜対数関数：数学Ⅱ＞

（ⅰ）底の変換公式を使って，底をa かb にそろえる．

（ⅱ）与えられた式の両辺を2乗し（ⅰ）の結果を使って，$\log_a b$ と$\log_b a$ それぞれの2乗の和を求める．この値を使って，求める式の2乗の和の値が求められる．$a>b>1$より，$\log_a b-\log_b a<0$ であることに注意しよう．

4　＜微分:数学Ⅱ＞

（ⅰ），（ⅱ）　平均変化率，微分係数，導関数などの重要な用語の意味をしっかり理解しておこう．

5　＜図形の計量：数学Ⅰ＞

空間図形の問題であるが，余弦定理や三角形の面積の公式などを使う基本的な問題である．（ⅲ）

は四面体の体積を2通りに表わして，見えない高さを求める頻出問題である．

6　＜数列：数学B＞

（ⅰ）数学的帰納法で証明する．$a_n>0$ であることを述べて，相加平均・相乗平均の関係を用いて証明することもできる．

（ⅱ）（ⅰ）を用いてa_n-a_{n+1} が0以上であることを示せばよい．

【総評】

必須問題は，「小問集合」で（ⅰ）～（ⅳ）まで数学Ⅰの基本的な良問であった．選択問題は，数学ⅠA，数学ⅡB から万遍なく出題され，努力を重ねて勉強してきた受験生は実力が出せたのではないだろうか．証明問題の6を除き，問題の難易度に差はなかったと思われる．今回は選択問題に，「三角関数」や「積分」や「ベクトル」などの出題はなかったが，どの単元も万遍なく学習しておくことが大切である．全体的に基本的な良問なので，受験生は基礎をしっかり固めて標準レベルの問題演習までやっておきたい．