２００５年度 東北学院大 解答速報（２月４日分） 文学部英文学科（昼）・キリスト教学科・歴史学科、教養学部地域構想学科

【必須問題】

1 （ｉ） 648 個 （ⅱ） 129 個 （ⅲ） 300 個 （ⅳ） 280 回

【選択問題】

2 （ｉ） $120°$ （ⅱ） $10\sqrt{19}$ （ⅲ） $\dfrac{30\sqrt{57}}{19}$

3 （ｉ） $x=\dfrac{3}{2}$ （ⅱ） $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ または $1 < x$

4 （ｉ） $a=\dfrac{1}{3}$ のとき 最大値 $\dfrac{32}{27}$ （ⅱ） $f(x)=3x^2-8x-5$

5 （ｉ） $(右辺)-(左辺)=-\dfrac{1}{2(n+2)}+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{2}{2n(n+2)(n+1)^2}>0$ （終）

（ⅱ） 数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき，(左辺)＝(右辺)＝1 となるから成り立つ．

$n=k\,(k \geqq 1)$ のとき，与式が成り立つと仮定する．両辺に $\dfrac{1}{(k+1)^3}$ を加えて

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{k^3}+\frac{1}{(k+1)^3} \leqq \frac{5}{4}-\frac{1}{2k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)^3}$$

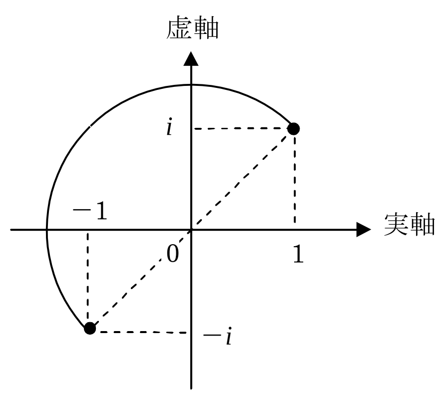
$$=\frac{5}{4}+\frac{1}{k+1}\left\{-\frac{1}{2k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$<\frac{5}{4}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)} \quad (\because (\mathrm{i})より)$$

よって， $n=k+1$ のときも与式は成り立つ． 以上より，すべての自然数 n に対して，与式は成り立つ．（終）

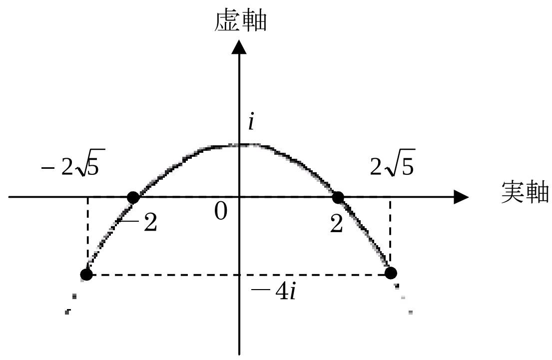
6 （ｉ）

右図のような原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の半円となる。



（ⅱ）

右図のような
放物線の一部となる



講　評

1　いずれも易しいが，少しずつひねってあって面白い．
(ⅰ)は基本である．(ⅱ)は 101 から 997 までである．(ⅲ)は 12 の倍数の個数も求めよう．
(ⅳ)は 1 が百の位，十の位，一の位に現れる場合に分けて考えればよい．

2 展開図における側面の扇形は弧の長さが円周の３分の１であることに注意しよう．
(ⅱ)はよくある問題であるが，曲線は展開図において線分となるときが最短である．
(ⅲ)は三角形ＯＡＢの面積を求めたら，ＯからＡＢに引いた垂線の長さを求めよう．

3 (ⅰ)は基本である．(ⅱ)はやや面倒だ．底を２にそろえてｘ＞１のときと，０＜ｘ＜１のときに分けて考えよう．その際，不等号の向きに注意しよう．

4　(ⅰ)は三角形を図示すれば，底辺と高さをａを用いて表すことができるから，面積Ｓは３次関数となる．
(ⅱ)は ｘの係数と定数項をそれぞれａ，ｂとおいて，それらを求めよう．基本である．

5 (ⅰ)は普通に証明できる．これを(ⅱ)の証明の途中に用いるのがポイントだ．もちろん(ⅱ)は別の証明方法もあるが，数学的帰納法がわかりやすいだろう．

6 いずれも複素写像の問題である．(ⅰ)は円の一部を回転移動と相似変換することによって図形的にわかる．(ⅱ)はｚ＝１＋ｂｉとおいて計算しよう．ｂの範囲に注意！ 答えが放物線の一部になる問題は面白い．個人的に東北学院大の複素数平面の問題は 面白い問題が多く感心する．新教育課程から消えるのは残念である．

今日の選択問題は難易度にあまり差がないので，自分の得意分野で勝負するのがよいだろう．