2006年度　東北大学（文系）　数学解答・解説および配点予想

配点予想

$\boxed{1}$ （50点）【解答】

（1）　$P=(x+a)^2-\{3c(y+b)\}^2$

$=\{x+a+3c(y+b)\}\{x+a-3c(y+b)\}$

$=(x+3cy+a+3bc)(x-3cy+a-3bc)$・・・(答)　　10点

$Q=\{(x+11)+4y\}\{(x+11)+9y\}$

$=(x+4y+11)(x+9y+11)$・・・(答)　　10点

$R=x^2+(py+2qy+4)x+(py-7)(2qy+11)$

$=(x+py-7)(x+2qy+11)$・・・(答)　　10点

（2）　QとRを比較する。qは整数なので　$2qy\neq 9y$

であるから、$x+2qy+11=x+4y+11$

両辺の係数を比較して、　$q=2$　　5点

ここでcは整数であるから、Pが$x+4y+11$を因数にもつことはなく、

$P=(x+py-7)(x+9y+11)$と定まる。あとは、このPの式が(1)のPの式と一致する条件を考えればよい。

（i）　$\begin{cases} x+py-7=x+3cy+a+3bc \\ x+9y+11=x-3cy+a-3bc \end{cases}$

のとき、係数比較より

$p=3c,\ -7=a+3bc,\ 9=-3c,\ 11=a-3bc$

$\therefore a=2,\ b=1,\ c=-3,\ p=-9$　　5点

（ii）　$\begin{cases} x+py-7=x-3cy+a-3bc \\ x+9y+11=x+3cy+a+3bc \end{cases}$

のとき、係数比較より

$p=-3c,\ -7=a-3bc,\ 9=3c,\ 11=a+3bc$

$\therefore a=2,\ b=1,\ c=3,\ p=-9$　　5点

以上より、求める整数$a,\ b,\ c,\ p,\ q$は

$(a,\ b,\ c,\ p,\ q)$

$=(2,\ 1,\ -3,\ -9,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3,\ -9,\ 2)$・・・(答)　　5点

$\boxed{1}$ **【解説】**

（１）　因数分解の典型問題なので問題ないだろう。ポイントは、

①　P は　(2 乗)－(2 乗)　に気づくこと

②　Q は　$x+11=X$ のように 1 文字とみなすこと

③　x の降べきの順に整理すること

である。

（２）　ポイントは q が整数であるということ。これより　$2qy\neq 9y$ に気づくことができ、

解答のように解ける。c の値として± 3 の 2 通り求まるが、

$\mathrm{P}=(x+a)^2-9c^2(y+b)^2$ の形から 2 通りあって然るべきだと確認できる。

2 （50 点）【解答】

X の取る値は、X＝3,4,5,6,7 であり、その場合の数は X より小さい 2 数を Y,Z として選ぶ組合せで計算できる。確率 $P_X(X)$は全事象の数が ${}_7C_3=35$ 通りより

$$P_X(3)=\frac{1}{35},\quad P_X(4)=\frac{{}_3C_2}{35}=\frac{3}{35}$$

$$P_X(5)=\frac{6}{35},\quad P_X(6)=\frac{10}{35},\quad P_X(7)=\frac{15}{35}$$

X	3	4	5	6	7	計
$P_X(X)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{15}{35}$	1
$XP_X(X)$	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{30}{35}$	$\frac{60}{35}$	$\frac{105}{35}$	$\frac{210}{35}=6$

$\therefore\ E(X)=6$

Z の取る値は、Z＝5,4,3,2,1 であるが、その確率 $P_Z(Z)$は、X の場合と同様に考えて、

$P_Z(5)=P_X(3)$，$P_Z(4)=P_X(4)$，$P_Z(3)=P_X(5)$，$P_Z(2)=P_X(6)$，$P_Z(1)=P_X(7)$となるから

Z	5	4	3	2	1	計
$P_Z(Z)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{15}{35}$	1
$ZP_Z(Z)$	$\frac{5}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{70}{35}=2$

$\therefore\ E(Z)=2$

Y については、Z を Y より小さい数から、X を Y より大きい数より各 1 個ずつ選ぶ場合と考えて、確率 $P_Y(Y)$を求めることができる。

Y	2	3	4	5	6	計
$P_Y(Y)$	$\frac{1\times5}{35}$	$\frac{2\times4}{35}$	$\frac{3\times3}{35}$	$\frac{4\times2}{35}$	$\frac{5\times1}{35}$	1
$YP_Y(Y)$	$\frac{10}{35}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{36}{35}$	$\frac{40}{35}$	$\frac{30}{35}$	$\frac{140}{35}=4$

$\therefore\ E(Y)=4$

以上より

X，Y，Z の期待値は、それぞれ 6，4，2 である（答）

配点予想

5 点

各列 2 点
2×5＝10

5 点

各列 2 点
2×5＝10

5 点

各列 2 点
2×5＝10

5 点

2 【解説】

7 個から 3 個を取り出す場合の数が ${}_7C_3=35$ 通りで、多くはないと考えるならば、3 個の数字の組を列挙して期待値を求めることも可能である。

ここでは、例えば $X=5$ のとき

$$\underbrace{\textcircled{1}\ \ \textcircled{2}\ \ \textcircled{3}\ \ \textcircled{4}}_{Y,\ Z}\ \ \underset{X}{\underset{||}{\textcircled{5}}}\ \ \textcircled{6}\ \ \textcircled{7}$$

Y, Z は 1～4 より 2 個選べばよいと考えている。取り出された 2 数は大きいほうが Y、小さいほうが Z と 1 通りに決まるので、場合の数は X より小さい数から 2 つ選ぶ組合せとして計算すればよい。

同様に $Z=3$, $Y=3$ の場合は下図のように考えればよい。

$Z=3$

$$\textcircled{1}\ \ \textcircled{2}\ \ \underset{Z}{\underset{||}{\textcircled{3}}}\ \ \underbrace{\textcircled{4}\ \ \textcircled{5}\ \ \textcircled{6}\ \ \textcircled{7}}_{Y,\ X}$$

$Y=3$

$$\underbrace{\textcircled{1}\ \ \textcircled{2}}_{Z}\ \ \underset{Y}{\underset{||}{\textcircled{3}}}\ \ \underbrace{\textcircled{4}\ \ \textcircled{5}\ \ \textcircled{6}\ \ \textcircled{7}}_{X}$$

$\boxed{3}$ （50 点）**【解答】**

配点予想

（1）図－2において、対称性より CH**は**$\angle BCD$ **を二等分する。**

$|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CD}|$**より**

$$\overrightarrow{CH} = k\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right)$$ **とする。**

5 **点**

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CA}$$

5 **点**

$$= k\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right) - \overrightarrow{CA}$$

$\overrightarrow{AH}$ **は平面P上の任意のベクトルに垂直であるから**

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

3 **点**

$$k\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CB}|^2 = 1$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CD}|\cos a = \cos a$$

2 **点**

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

2 **点**

より

$$k = \frac{\frac{1}{2}}{1 + cos\ \alpha} = \frac{1}{2(1 + cos\ \alpha)}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2(1 + \cos a)}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2(1 + \cos a)}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$$ **・・・(答)**

5 **点**

（2） $\overrightarrow{AH} = k\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right) - \overrightarrow{CA}$

$$|\overrightarrow{AH}|^2 = k^2|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}|^2 - 2k\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{CA} + |\overrightarrow{CA}|^2$$

5 **点**

右辺に（1）で用いた内積の値と $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}$**,** $|\overrightarrow{CA}|^2 = 1$ **を代入して、**

$$|\overrightarrow{AH}|^2 = k^2(2 + 2\cos a) - 2k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1$$

5 **点**

$$= \frac{2(1 + cos\ \alpha)}{4(1 + cos\ \alpha)^2} - \frac{2}{2(1 + cos\ \alpha)} + 1$$

$$= \frac{1 + 2cos\ \alpha}{2(1 + cos\ \alpha)}$$

5 **点**

$$\left|\overrightarrow{AH}\right| = \sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}}$$ ・・・(答)　　3 点

（3） HがΔBCDの重心であるから

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right)$$　　3 点

（1）より $\overrightarrow{CH} = k\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right)$

$$k = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{1}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$　　2 点

$0° < a < 120°$ より

$$a = 60°$$ ・・・(答)　　5 点

$\boxed{3}$ **【解説】**

（1）H が平面 P 上にあるので、

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+(1-s-t)\overrightarrow{AD}$ とし、

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$$

より解くこともできるが、計算量が多い。

そこで、図－２は点 A, H, C を含む面に関し対称であることに着目する。

$\angle BCH=\angle DCH$ より

$$\overrightarrow{CH}=k\left(\frac{\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|}+\frac{\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}\right)=k\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right)$$

と表すことができ、以下の計算が簡単となる。

（２）$\overrightarrow{AH}$ の長さ $\left|\overrightarrow{AH}\right|$ は $\left|\overrightarrow{AH}\right|^2$ より内積を用いて計算できるが、ベクトルでは頻出である。

（３）直観的に正四面体である場合と推定される。（１）が解けた人にはラッキーな問題である。

$\boxed{4}$ （50 点）【解答】

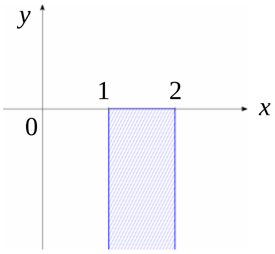
配点予想

D ：$1 \leqq x \leqq 2,\quad y \leqq 0$

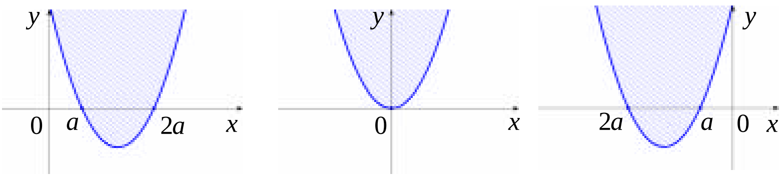
E ：$y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2 = (x-a)(x-2a)$

$D,\ E$ は下図の斜線部分（境界を含む）である。

E はで場合分けされる。



D



$a>0$ のとき　　$a=0$ のとき　　$a<0$ のとき

E

$D,\ E$ の図示に各 5 点

（1） D と E が共有点をもつためには　$a>0$ が必要

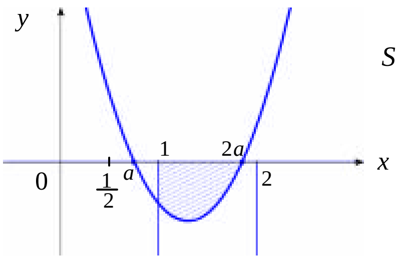
$a>0$ のもとで、 D と E が共有点をもたない条件は

$$2a<1 \text{　または　} 2<a \quad \Leftrightarrow \quad a<\frac{1}{2} \text{　または　} 2<a$$

よって、共有点をもつ条件は　$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 2$　・・・(答)

10 点

（2）（ｉ） $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき



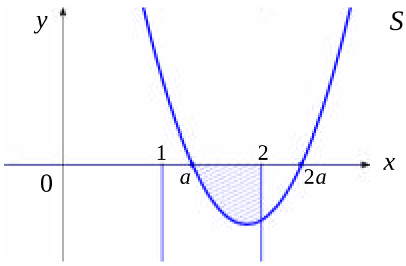
$$S(a) = -\int_1^{2a}\left(x^2 - 3ax + 2a^2\right)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2a^2x\right]_1^{2a}$$

$$= -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3}$$

積分の式変形 5 点

（ii） $1 \leqq a \leqq 2$ のとき



$$S(a) = -\int_a^{2}\left(x^2 - 3ax + 2a^2\right)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2a^2x\right]_a^{2}$$

$$= \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3}$$

積分の式変形 5 点

以上より、

$$S(a)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}a^3+2a^2-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{3} & \left(\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1 \text{ のとき}\right)\\ \dfrac{5}{6}a^3-4a^2+6a-\dfrac{8}{3} & \left(1\leqq a\leqq 2 \text{ のとき}\right)\end{cases}$$

・・・(答)　　10 点

（3） $\frac{1}{2}<a<1$ のとき

$$S'(a)=-2a^2+4a-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(2a-1)(2a-3)$$

$1<a<2$ のとき

$$S'(a)=\frac{5}{2}a^2-8a+6=\frac{1}{2}(5a-6)(a-2)$$

増減表は次の通り

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$	／	$+$	／	$+$	0	$-$	／
$S(a)$	0	↗	$\frac{1}{6}$	↗	$\frac{16}{75}$	↘	0

よって、$S(a)$ の最大値は $\frac{16}{75}$ $\left(a=\frac{6}{5}\text{ のとき}\right)$ ・・・(答)　　10 点

$\boxed{4}$ **【解説】**

（1） D、E **の領域を正しく図示しよう。ポイントは、**

① $x^2-3ax+2a^2=(x-a)(x-2a)$ **の因数分解ができること**

② a **の値で場合分けして** E **を図示すること**

である。正しく図示できれば、 $a>0$ **が必要条件であることに気づくだろう。**

（2） a **と** 1 **との大小で場合分けすることに気づけばよい。積分計算ではグラフが** x **軸の下側にあることに注意しよう。**

（3）正しく増減表が書ければわかる。