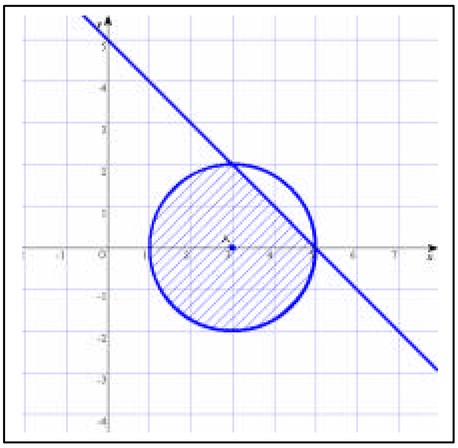
2006年度　東北大学（理系）　数学解答・解説および配点予想

$\boxed{1}$　（50 点）【解答】

$x^2-6x+y^2+5\leqq 0$ より，$(x-3)^2+y^2\leqq 4$ となるから，中心 A(3，0)，半径 2 の円の周上及び内部である。

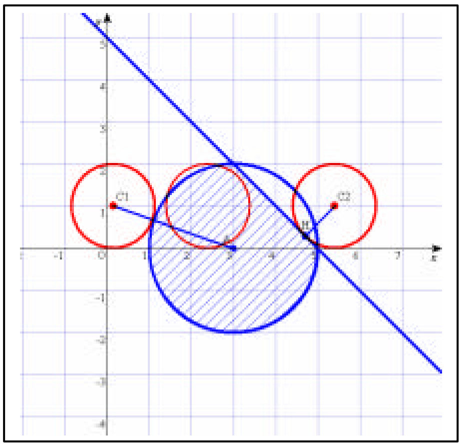


また $x+y\leqq 5$ は直線 $x+y=5$ 上の点及び下側の領域であるから領域 D は右図の斜線部分（境界を含む）となる。（答）

また $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ より

$(x-a)^2+(y-1)^2=1$ となるから

中心 C(a ，1)，半径 1 の円である。



これは，a が変化するに従って右下図のように直線 $y=1$ 上に中心をとりながら変化する。

したがって

ⅰ）　a が最小となるのは

中心 C が図の C_1 となって，2 円が外接するときであるから，

CA＝1＋2 をみたす。

よって，$CA^2=9$ より

$(a-3)^2+1=9$

∴　$a=3\pm 2\sqrt{2}$

図より $a<3$ であるから，求める a の最小値は $3-2\sqrt{2}$ である。

ⅱ）　a が最大となるのは，円が直線 $x+y-5=0$ に接するとき，

すなわち，中心が図の C_2 となるときであるから CH＝1 であればよい。

よって，$\dfrac{|a+1-5|}{\sqrt{1+1}}=1$ より，$|a-4|=\sqrt{2}$　　∴　$a=4\pm\sqrt{2}$

図より $a>4$ であるから，求める a の最大値は $4+\sqrt{2}$ である。

以上より

（答）$\begin{cases} \text{最大値}\quad 4+\sqrt{2} \\ \text{最小値}\quad 3-2\sqrt{2} \end{cases}$

配点予想

4 点

2 点

図示 5 点

境界条件 2 点

2 点

3 点

5 点

5 点

3 点

5 点

5 点

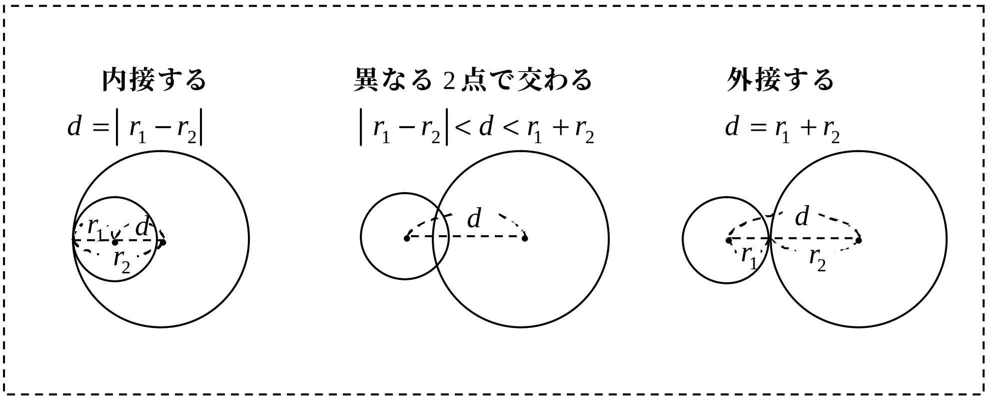
3 点

6 点

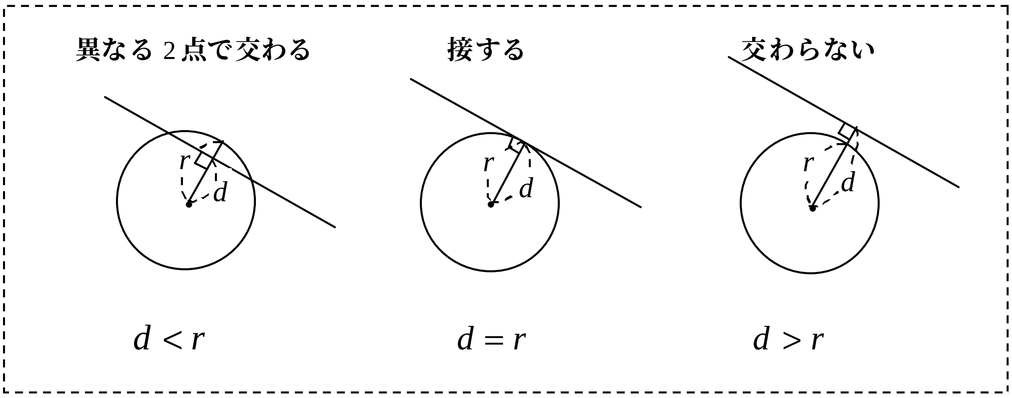
1 【解説】

本当に理系学部の問題かと思えるくらい基本的なサービス問題である．確実に完答しよう．
領域 D は境界線上の点も含む，と明記するのを忘れないようにしよう．こういう細かいところで減点されると，ライバルとの差がつくのである．

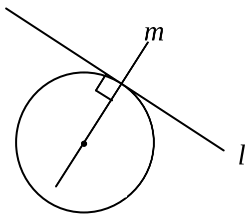
実数 a が最小となるのは，２円が外接するときであることから条件式を作ろう．2 円の中心間の距離を d ，半径をそれぞれ r_1 ，r_2 とすると，それら 2 円の位置関係によって，それぞれ次式が成り立つ．



また，最大となるときは，円と直線が接するときである．円と直線の位置関係は，中心と直線との距離 d と半径 r との大小関係で考える．



また，接するときの接点の座標を求めたいときは，接線 l と，円の中心と接点を通る直線 m （直線 l に対して垂直）との交点の座標を求める方法が速い．（右図）



この方法を用いると，接点の座標は $\left(4+\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とわかる．
もちろんこの点は領域Dに含まれていることが図から明らかだから，求めなくてもよい．

$\boxed{2}$ （50 点）【解答】

文系学部の $\boxed{3}$ と同じ問題ですので、そちらをご覧下さい

配点予想

$\boxed{3}$ （50 点）【解答】

配点予想

（１）くじを１回引くときの景品の相当額の期待値は

$10000\times\dfrac{1}{500}=20$ **（円/回）であるから** 5 点

求める期待値は， 20 **（円/回）** ×10 **（回）** ＝200 **（円）・・・・（答）** 5 点

（２）２人が１回ずつくじを引くとき，当たり外れが一致する確率は

$$\left(\frac{1}{500}\right)^2+\left(\frac{499}{500}\right)^2=0.996008 \quad 0.996$$ 10 点

よって４回すべて当たり外れが一致する確率は

$$(0.996)^4=(0.992016)^2 \quad (0.992)^2=0.984\cdots$$

ゆえに求める確率は， 0.98 **・・・・（答）** 10 点

（３）くじを n **回引くとする。**

このとき（１）より景品代の期待値は $20n$ **円であるから，** 5 点

題意をみたす条件は，

$$300000+20n\leqq 35n$$ 5 点

$$\therefore n\geqq 20000$$ 5 点

以上より， 2 **（万回）** ×1000 **（円）** ＝2000 **（万円）以上を目標と** 5 点

すればよい。・・・・（答）

$\boxed{3}$ 【解説】

（1） くじを 10 回引いたあとで，全体を考えていくなら次のように解く．

【別解】 $p=\dfrac{1}{500}$ とおくと，10 回のうち k 回（$k=0$，1，・・・，10）だけ当たりくじを引く確率 P_k は，$P_k={}_{10}C_k\cdot p^k(1-p)^{10-k}$ であるから，求める期待値は，

$$\sum_{k=0}^{10}10000k\cdot P_k=10000\sum_{k=1}^{10}k\cdot {}_{10}C_k\cdot p^k(1-p)^{10-k}$$

$$=10000\sum_{k=1}^{10}10\cdot {}_9C_{k-1}\cdot p^k(1-p)^{10-k}$$

$$=100000\sum_{k=0}^{9}{}_9C_k\cdot p^{k+1}(1-p)^{9-k}$$

$$=100000p\sum_{k=0}^{9}{}_9C_k\cdot p^k(1-p)^{9-k}=100000p\{p+(1-p)\}^9 \quad （\because 二項定理より）$$

$$=100000p=\frac{100000}{500}=200 \quad （円）$$

上の解法において，右の公式を用いた．

$$k\cdot {}_nC_k=n\cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

おそらく出題者はこのような解法を望んでいるのだろう．これを【解答】のように簡単に求めてしまうと減点されるのならば，【別解】のような方法に誘導するような設問形式になっていてほしい．なお，【解答】の方法は数学C確率分布の考え方になるので範囲外といえよう．

（2） 計算がややこしいだけで難しくない．この問題も当たり外れの並べ替え $2^4=16$ 通りのすべての場合を考えて式を作っていくと，次のような大変な式になってしまうので自滅するだろう．

$p=\dfrac{1}{500}$ として求める確率は，$p^8+4p^6(1-p)^2+6p^4(1-p)^4+4p^2(1-p)^6+(1-p)^8$

（3） （1）のように考えれば，簡単な 1 次不等式の問題になる．長い文章をよく読んで，題意をしっかり把握すれば易しい．ここでも出題者は，(1)の【別解】のような解法を望んでいると思われる．すなわち，景品代の期待値は，

$$\sum_{k=0}^{n}10000k\cdot P_k=10000\sum_{k=1}^{n}k\cdot {}_nC_k\cdot p^k(1-p)^{n-k}=\cdots=10000np=20n\ (円)$$ となる．

$\boxed{4}$　(50 点)【解答】　　**配点予想**

(1)　$f'(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x}$ より，　2 点

$f'(2)=\sin\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}=1$・・・(答)　2 点

また，$f''(x)=-\dfrac{\pi^2}{x^3}\sin\dfrac{\pi}{x}$ であるから，　2 点

$x>2$ のとき　$0<\dfrac{\pi}{x}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\sin\dfrac{\pi}{x}>0$ である。

よって $f''(x)<0$ より　$f'(x)$ は単調減少関数である。　2 点

ゆえに，$x>2$ において $f'(x)<f'(2)=1$ である。　(証明終)　2 点

(2)　$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)=\sin k\pi-k\pi\cos k\pi$

$=0-k\pi\times(-1)^k$

$=(-1)^{k-1}\cdot k\pi$・・・(答)　5 点

(3)　$g(x)=f'(x)-1$　とおく。

(1)より $g(x)=0$ をみたす x は，$0<x\leqq 2$ にのみ存在するから　2 点

以下，$0<x\leqq 2$ で考える。

$g(2)=0$ より $x_1=2$ である。　2 点

また，k が自然数のとき，$g\left(\dfrac{1}{k}\right)=(-1)^{k-1}\cdot k\pi-1$ より

k が奇数のとき　$g\left(\dfrac{1}{k}\right)>0$，　k が偶数のとき　$g\left(\dfrac{1}{k}\right)<0$　($\because kp>1$)　4 点

また，$g'(x)=f''(x)=-\dfrac{\pi^2}{x^3}\sin\dfrac{\pi}{x}$ であるから，

$1<x<2$ において，$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{x}<\pi$　より　$\sin\dfrac{\pi}{x}>0$

よって　$g'(x)<0$ であるから，$g(x)$ は単調減少関数である。　4 点

さらに，$k=2,\ 3,\ 4,$・・・のとき，

$\dfrac{1}{k}<x<\dfrac{1}{k-1}$　すなわち，$(k-1)\pi<\dfrac{\pi}{x}<kx$ において，

k が奇数ならば $g'(x)<0$ より $g(x)$ は単調減少関数

k が偶数ならば $g'(x)>0$ より $g(x)$ は単調増加関数　4 点

である。

配点予想

ゆえに，$g(x)$ は $x>0$ において連続関数であるから，$g(x)=0$ は

各々の k に対して，区間 $\dfrac{1}{k} < x < \dfrac{1}{k-1}$ に１つずつ解 $x=x_k$ をもつ。 5 点

以上より，区間 $\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n-1}$ に $g(x)=0$ すなわち $f'(x)=1$

となる，大きいほうから n 個目の $x=x_n$ が存在するので， 4 点

$\dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{1}{n-1}$ が成り立つ。 （証明終）

（4） （3）より $\dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{1}{n-1}$ が成り立ち， 4 点

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ ，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-1}=0$ であるから， 3 点

はさみうちの原理より $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ ・・・(＊) となる。

また，$\left|\sin\dfrac{p}{x_n}\right| \leqq 1$ より

$$0 \leqq |f(x_n)| = \left|x_n\sin\dfrac{p}{x_n}\right| \leqq x_n \quad \text{となるから}$$

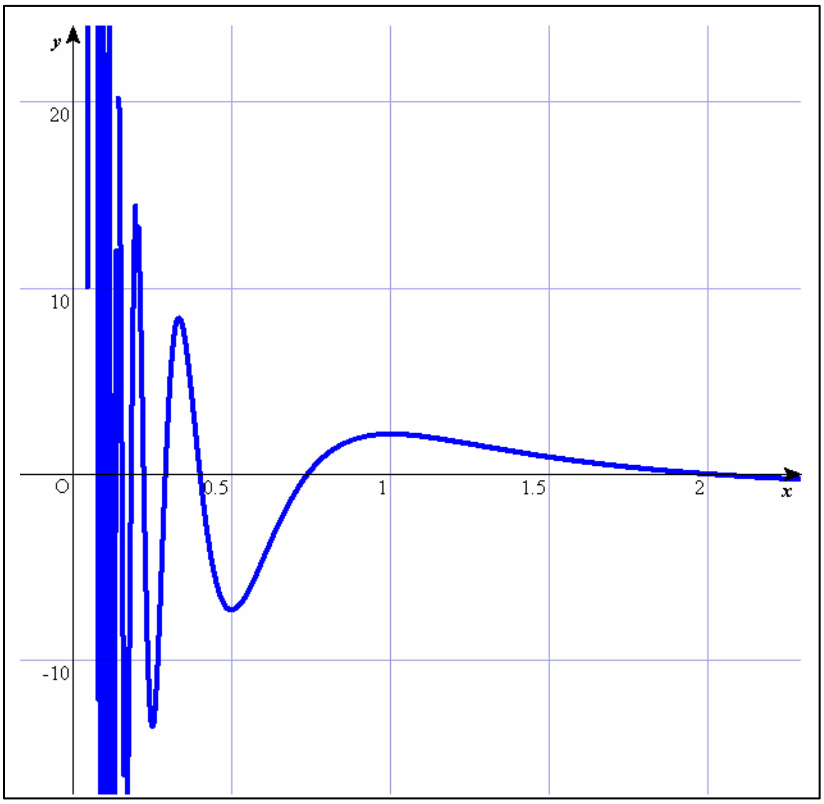
(*)を用いて，再び はさみうちの原理より 3 点

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \;・・・(答)$$

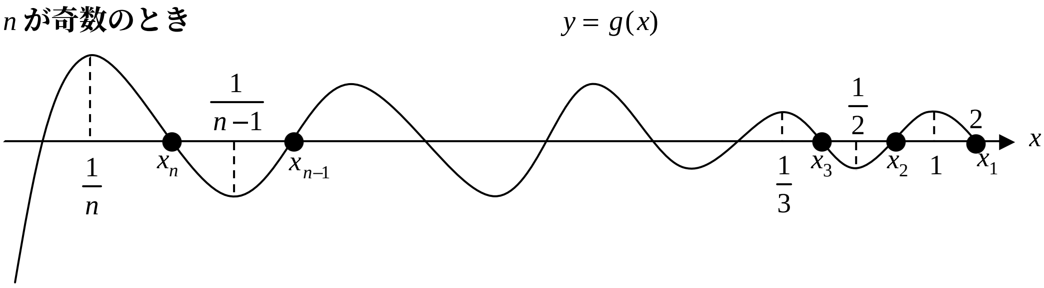
$\boxed{4}$ 【解説】

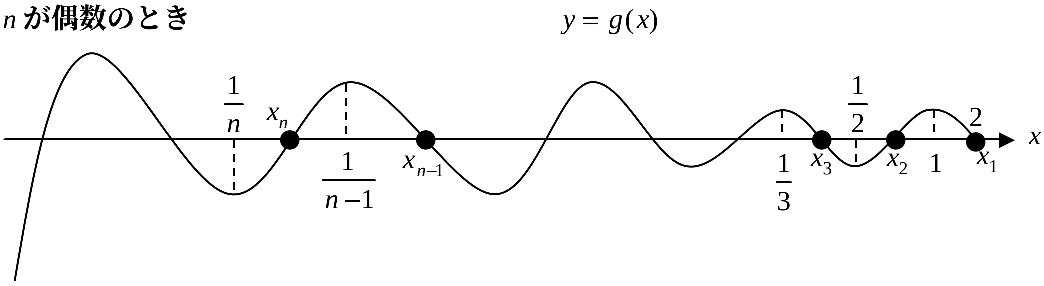
（1）と（2）は基本であるから，確実に得点してほしい．

（3）の証明によって題意が示される理由を以下に解説しよう．まず， $y=g(x)$ のグラフを次に示す．



ただし，このままではわかりにくいので，単純化したグラフを以下に示す．



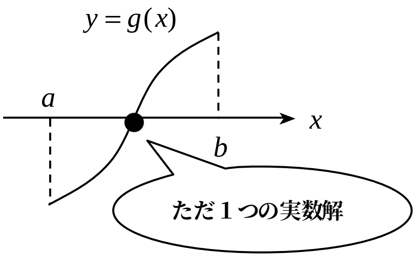


このようなグラフになるので， $g(x)=0$ の解 x_1， x_2，・・・， x_n が順に存在することがわかる．

なお，この考え方のもとになっている定理を「中間値の定理」といい，次のようなものである．

> 関数 $g(x)$ が，区間 $[a,\ b]$ において連続で，$g(a)$ と $g(b)$ が異符号のとき，
> 方程式 $g(x)=0$ は，区間（a，b）に少なくとも1つの実数解をもつ

特に，右図のように $g(x)$ が単調増加のとき，方程式 $g(x)=0$ は区間（a，b）に「ただ1つの」実数解をもつといえる．



もちろん，単調減少のときも同様であるから，$g(x)=0$ は，

区間　$\dfrac{1}{k}<x<\dfrac{1}{k-1}$　（$k=2$，3，4・・・）

に一つずつ解 $x=x_k$ をもつのである．

このように，中間値の定理を用いる問題は，2003年度前期 $\boxed{6}$ および 2005年度前期 $\boxed{6}$ でも出題されている．東北大理系学部では頻出の分野といえよう．

$\boxed{5}$ （50 点）【解答】

配点予想

（1） $A+B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=C$ **とおく**

$$C^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2C=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2 点

以上より， $k \geqq 2$ **の自然数** k **に対して**

$C^k=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ **と推定されるので，数学的帰納法を用いて証明する。** 3 点

ｉ） $k=2$ **のとき，明らかに成り立つ。** 2 点

ii） $k=m\ \ (m \geqq 2)$ **のとき成り立つと仮定すると，**

$$C^{m+1}=C^mC=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

4 点

よって， $k=m+1$ **のときも成り立つ。**

ゆえにｉ）ii）より， $k \geqq 2$ **のすべての自然数** k **に対して成り立つ。** 2 点

以上より， $(A+B)^k=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ **である。・・・（答）** 2 点

（2） $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A$ **より** 2 点

すべての自然数 m **に対して，** $A^m=A$ **である。** 2 点

また， $B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$B^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

2 点

よって， $n \geqq 3$ **のとき，** $B^n=O$ **となる。** 2 点

i） A^mB^n を求める。

$n=1$ のとき

$$A^mB=AB=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$n=2$ のとき

$$A^mB^2=AB^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

$n \geqq 3$ のとき

$$A^mB^n=AO=O$$

ii） B^nA^m を求める。

$n=1$ のとき

$$BA^m=BA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$n=2$ のとき

$$B^2A^m=B^2A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

$n \geqq 3$ のとき

$$B^nA^m=OA=O$$

各 2 点

各 2 点

各 1 点

以上より，すべての自然数 m に対して

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \text{ のとき } A^mB^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ B^nA^m=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\ n \geqq 2 \text{ のとき } A^mB^n=B^nA^m=O \end{array}\right\}$$

・・・(答)

2 点

（3） $$(A+B)X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}y_1&y_2&y_3\\y_1+z_1&y_2+z_2&y_3+z_3\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$ であるから，

3 点

$y_1=y_2=y_3=0$ 従って， $z_1=z_2=z_3=0$ である。

2 点

また，

$$X(A+B)=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x_1+x_2&x_2\\0&y_1+y_2&y_2\\0&z_1+z_2&z_2\end{pmatrix}=O$$ より

3 点

$x_2=0$ であるから $x_1=0$ であり， x_3 は任意の実数でよい。

2 点

以上より，求める行列 X は

$$X=\begin{pmatrix}0&0&k\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ （ただし k は任意の実数）・・・(答)

5 点

$\boxed{5}$ 【解説】

(1)　入試で出題される 3 次の正方行列の問題は，計算だけで終わることが多い．この問題も計算し，答を推定し，数学的帰納法で証明するだけであるから難しくない．

(2)　A^m は，m の値にかかわらず同じ行列となる（このような行列を「べき等(とう)行列」という）が，B^n は，$n=1$ のときと，$n=2$ のときと，$n \geqq 3$ のときで異なるから場合分けしていこう．
ただし，答の $A^m B^n$ と $B^n A^m$ は，$n=2$ のときと $n \geqq 3$ のときは同じ結果となるから２つの場合に分けるだけでよい．

(3)　成分の計算をしていけば，簡単な方程式を解くだけの問題である．極めて易しい．

(1)(2)(3) は何か関係があるのかと思いながら解いた人も多いと思うが，結局別々の問題である．考えすぎないようにしよう．

$\boxed{6}$ （50 点）【解答】

文系学部の $\boxed{4}$ と同じ問題ですので、そちらをご覧下さい

配点予想