2008年度 東北大学(文系) 数学解答･解説および配点予想

ここでは文系数学の満点を 200 点満点で考えています。学部学科によっては満点が異なる場合がありますが、採点基準は共通であると考えられます。

1 (50 点)【解答】

配点予想

(1) $f(x)$ を因数分解すると,

$$f(x)=x(x+a-2)^2$$

よって $f(x)=0$ の解は, $x=0$, $2-a$ (2 重解)

これらの解が一致しない限り $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解を持つ。

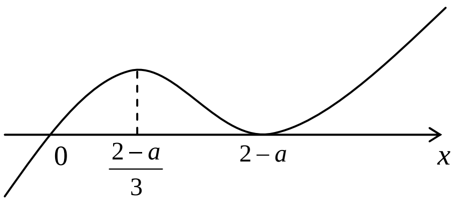
従って　$a\neq 2$　・・・(答)

(1)　10 点
・因数分解=5 点
・残り＝5 点

(2) $f'(x)=(3x+a-2)(x+a-2)$

となるので, $y=f(x)$のグラフの形を考えて

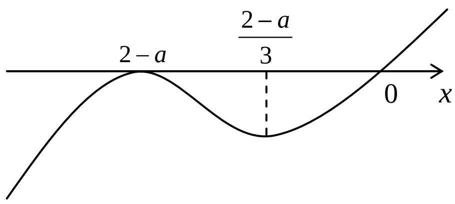
(i) $a<2$ のとき



極大値 ： $f(\frac{2-a}{3})=\frac{4}{27}(2-a)^3$

極小値 ： $f(2-a)=0$

(ii) $a>2$ のとき



極大値 ： $f(2-a)=0$

極小値 ： $f(\frac{2-a}{3})=\frac{4}{27}(2-a)^3$

(答)

(2)　25 点
・微分して因数分解=10 点
・残り＝15 点

(3)(i) $a<2$ のとき

$$\begin{cases} x=\dfrac{2-a}{3} \\ y=\dfrac{4}{27}(2-a)^3 \end{cases}$$

a を消去して

$y=4x^3\quad(x>0)$

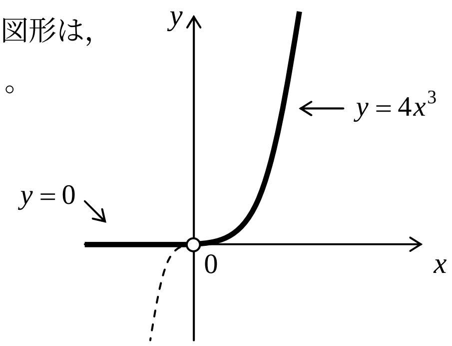
(ii) $a>2$ のとき

$$\begin{cases} x=2-a \\ y=0 \end{cases}$$

より

$y=0\quad(\mathrm{x}<0)$

従って点$(x,\ y)$が描く図形は,
右図の太線部分である。
(原点を除く)



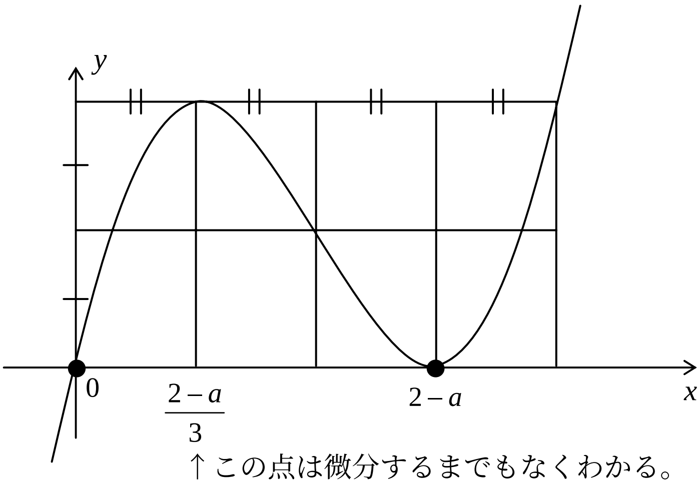
・・・(答)

(3)　15 点
・a を消去した式を明示=10 点
・残り=5 点

$\boxed{1}$ 【解説】

（1）微分は不要である。x をくくり出した残りが完全平方式になることに気づくべきである。
因数分解の結果からグラフの概形もわかり，（2）の方針も立つ。
解が直接求められるので、題意を満たす範囲を求めるのは容易である。

（2）場合分けに注意。極大と極小が入れ替わる。微分しても $(x+a-2)$ の因数を持つことを念頭に入れて計算するとよい。 $f(x)$ に代入するときは因数分解済みの式を用いる。
なお本問は 3 次関数の対称性を知っていれば微分を使わなくとも答えられる。



↑この点は微分するまでもなくわかる。

（3）軌跡の問題であることに気づくべきである。a を消去するとすぐ答えにたどりつける。（2）と同様場合分けに注意する。 $x \neq 0$ であることを明示するのを忘れないこと。

2 （50 点）【解答】

配点予想

条件（ｉ）より， $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = f(x)$ が成り立つから，

$a = e$ かつ $b = d$ ・・・① 10 点

条件（ii）より， $f(1-x) = a(1-x)^4 + b(1-x)^3 + c(1-x)^2 + d(1-x) + e$

$= a(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) + b(1-3x+3x^2-x^3) + c(1-2x+x^2) + d(1-x) + e$
$= ax^4 - (4a+b)x^3 + (6a+3b+c)x^2 - (4a+3b+2c+d)x + a+b+c+d+e$
$= f(x)$ が成り立つから，

$-(4a+b) = b$ かつ $6a+3b+c = c$ かつ $-(4a+3b+2c+d) = d$
かつ $a+b+c+d+e = e$ ・・・② 15 点

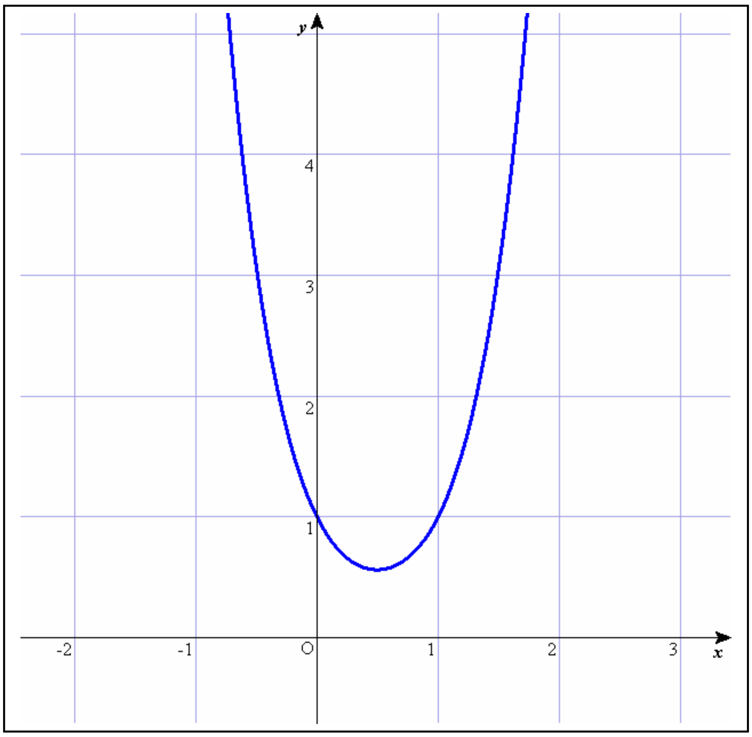
条件（iii）より， $f(1) = a+b+c+d+e = 1$ ・・・③ 5 点

ゆえに，①②③を解いて， $a = e = 1$， $b = d = -2$， $c = 3$ ・・・（答） 20 点

$\boxed{2}$ 【解説】

条件（ｉ）$x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ と，条件(ⅱ) $f(1-x) = f(x)$ は恒等式であるから，展開して係数を比較すれば連立方程式ができる。計算はやや面倒だが，うまい方法を考えて時間をムダにロスするより時には力づくで解くことも大切だ。

ちなみに，$y = f(x)$ のグラフは次のようなものである。



当然 $y = f(1-x)$ のグラフもこれと一致するが，$f(1-x) = f(x)$ が成り立つということは直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称であることを意味していることに注意しよう。それを利用したうまい解法もあるだろうが,【解答】のように力づくで解く方が無難である。

$\boxed{3}$ （50 点）【解答】

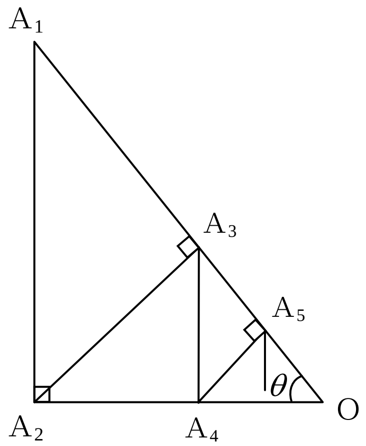
右図のように$\angle A_1OA_2=\theta$とおくと
$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\theta$
　よって$A_{k+1}A_{k+2}=A_kA_{k+1}\cos\theta$

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$ より

$$A_{k+1}A_{k+2}=\frac{1}{\sqrt{3}}A_kA_{k+1}$$

　また、三平方の定理より

$$A_1A_2=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$



　よってA_kA_{k+1}は初項$\sqrt{\frac{2}{3}}$，公比$\frac{1}{\sqrt{3}}$の等比数列なので

$$A_kA_{k+1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^k}$$

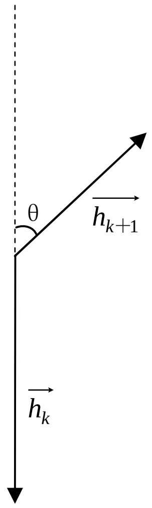
（2）2 つのベクトルは右図のような位置関係になるので

$\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ のなす角は 180°－θ、

よって$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=\left|\overrightarrow{h_k}\right|\left|\overrightarrow{h_{k+1}}\right|\cos(180°-\theta)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^k}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^{k+1}}(-\cos\theta)$$

$$=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$



$k=1$のとき，$\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^1=-\frac{2}{9}$

よって、$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$は初項$-\frac{2}{9}$，公比$\frac{1}{3}$の等比数列であるので、

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=\frac{-\frac{2}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^n}-1\right)$$

配点予想

公比を出して 5 点、そこまでの証明がしっかりできて 10 点

計 15 点

10 点

結果のみ 5 点
図示も含め過程がしっかり証明されて 10 点

計 15 点

10 点

$\boxed{3}$ 【解説】

（１）正確に図示して A_kA_{k+1} と $A_{k+1}A_{k+2}$ の関係性に気付くことが先決である。数列の図形問題としては、これに似た問題も多いので、しっかり基本を練習した人であれば、等比数列であることに気付くのは容易だったと思う。

あとは公比を導き出す過程をどう表現するかポイントである。解答のようにθなどをうまくおいて表現するのが妥当だろう。

（２）数列の問題かと思いきや、ベクトルがでてきたのであわてた人もいるのでは？　だが落ち着いて $\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ を計算すると、$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$ になり、ただの等比数列の和になることがわかる。

だが、$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ の計算が少し表現しにくい。2 つのベクトルのなす角を図などをうまく用いて表現することが大切である。

$\boxed{4}$ （50 点）【解答】

配点予想

題意より，P の座標が±1, ±2, …, ±6 のいずれかであるとき，

$\frac{1}{6}$ の確率で原点に移動し

$\frac{5}{6}$ の確率で±1, ±2, …, ±6 のいずれかの点に移動する。 5 点

（1）1 回目で原点に移動せず，2 回目で原点に移動すればよい。
最初の点 P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるから，
求める確率は

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$ ・・・(答) 10 点

（2）1 回目，2 回目で原点に移動せず，3 回目で原点に移動すればよい。
最初の点 P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるから，求める確率は

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$$ ・・・(答) 10 点

（3）まず，P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，
ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求める。
1 回目～$m-1$（回目）で原点に移動せず， m 回目で原点に
移動すればよいから，

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}$$ ・・・(＊) 10 点

P の座標が 7 であるとき，1 回サイコロを振ると点 P は
1, 2, …, 6 のいずれかの座標へ移動する。
ゆえに，n 回サイコロを振って原点に移動する確率は（＊）より

$$\frac{6}{6}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$ （ただし， $n\geqq 2$） 10 点

∴ $n=1$ のとき 0， $n\geqq 2$ のとき $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$ ・・・(答) 5 点

$\boxed{4}$ 【解説】

P の座標が±1, ±2, $\cdots$, ±6 のいずれかであるとき，$\dfrac{1}{6}$の確率で原点に移動し，$\dfrac{5}{6}$の確率で±1, ±2, $\cdots$, ±6 のいずれかの点に移動する，と考える。

（1）1 回目で原点に移動せず，2 回目で原点に移動すればよい。このように考えれば，計算は容易である。

（2）1 回目，2 回目で原点に移動せず，3 回目で原点に移動すればよい。このように考えれば，（1）と同様，容易に求まる。

（3）P の座標が 7 であるとき，1 回サイコロを振ると点 P は 1, 2, $\cdots$, 6 のいずれかの座標へ移動することに注意する。あとは，$n-1$（回）で最後に原点に移動すればよい。

一般に，P の座標が 1, 2, $\cdots$, 6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率は，1 回目〜$m-1$（回目）で原点に移動せず，m 回目で原点に移動すればよいから

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}$$

答えを書くときは，$n=1$のとき確率は 0 になることも明記しなければならない。