2008年度　東北大学 理系） 数学解答・解説および配点予想

ここでは理系数学の満点を 300 点満点で考えています。学部学科によっては満点が異なる場合がありますが、採点基準は共通であると考えられます。

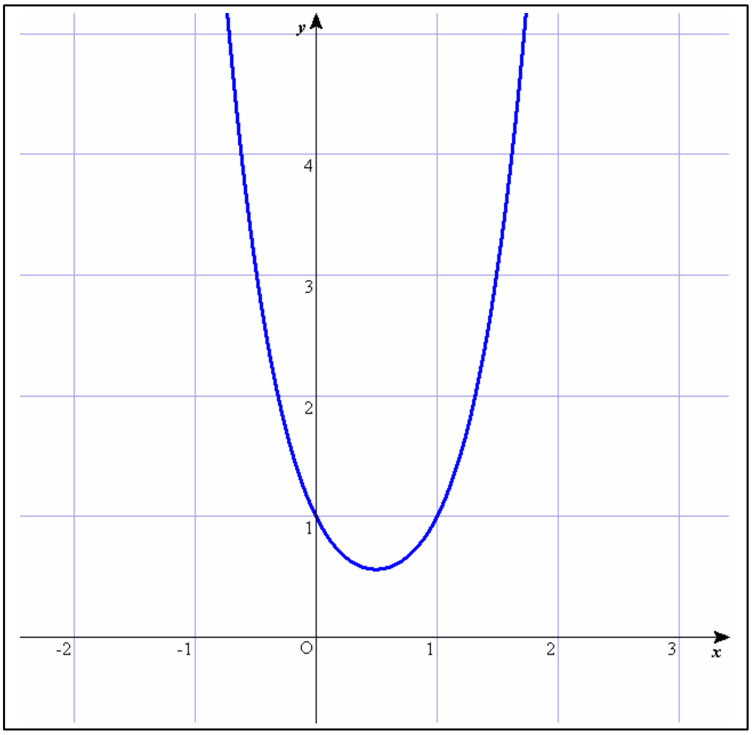
$\boxed{1}$　（50 点）【解答】

	配点予想
（1）　$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ （n は自然数）とおくと，	
$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=a_0+\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\dfrac{a_3}{x^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}$ より，	
$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+\cdots+a_nx^{4-n}$ となる．	4 点
ここで $n\geqq 5$ と仮定すると，a_nx^{4-n} の項より $x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は多項式とならないの	仮定して 3 点
で条件(ｉ)を満たさない．ゆえに，$f(x)$ の次数は 4 以下である．（証明終）	3 点
（2）　(1)の結果より，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおける．（a，b，c，d，e は実数）	2 点
条件(ｉ)より，$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=f(x)$ がすべての x について	3 点
成り立つから，$a=e$ かつ $b=d$　…①	①に 5 点
条件(ⅱ)より，$f(1-x)=a(1-x)^4+b(1-x)^3+c(1-x)^2+d(1-x)+e$	3 点
$=a(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)+b(1-3x+3x^2-x^3)+c(1-2x+x^2)+d(1-x)+e$	
$=ax^4-(4a+b)x^3+(6a+3b+c)x^2-(4a+3b+2c+d)x+a+b+c+d+e$	7 点
$=f(x)$ がすべての x について成り立つから，	
$-(4a+b)=b$ かつ $6a+3b+c=c$ かつ $-(4a+3b+2c+d)=d$	
かつ $a+b+c+d+e=e$　…②	②に 5 点
条件(ⅲ)より，$f(1)=a+b+c+d+e=1$　…③	③に 5 点
ゆえに，①②③を解いて，$a=e=1$，$b=d=-2$，$c=3$ となるから，	5 点
$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$　…（答）	5 点

$\boxed{1}$ 【解説】

多項式のことを整式ともいう．すなわち，$f(x)$ は $a_n x^n$ （a_n は実数，n は 0 以上の整数）の和として表される式であるから，$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ とおくと示しやすいだろう．このような書き方を知らないとすっきりした答案が書けないので，覚えておくべきである．
$n \geqq 5$ と仮定すると，少なくとも $a_n x^{4-n}$ の項が単項式（文字や数を掛け合わせた式）にならないので不合理である．このようにして，背理法を用いるのがよいだろう．

次数が 4 次以下であることが示せたら，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおいて，条件(ⅰ)～(ⅲ)より，連立方程式を作ればよい．
特に，条件(ⅰ) $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ と，条件(ⅱ) $f(1-x)=f(x)$ は x の恒等式であるから，展開して係数を比較すれば連立方程式ができる．計算はやや面倒だが，うまい方法を考えて時間をムダにロスするより時には力づくで解くことも大切だ．ちなみに，$y=f(x)$ のグラフは次のようなものである．



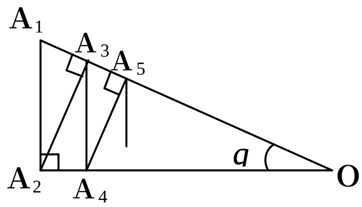
当然 $y=f(1-x)$ のグラフもこれと一致するが，$f(1-x)=f(x)$ が成り立つということは
直線 $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称であることを意味していることに注意しよう．それを利用したうまい解法もあるだろうが，ここでは【解答】のように力づくで解く方が無難である．

なお，すべての x について成り立つことから具体的に $x=1$ や $x=2$ を代入して連立方程式を作る方法もあるが（数値代入法），そのときの $f(x)$ がすべての条件を満たしていることを確認（十分条件の確認）しないと大きく減点されてしまうので注意しよう．

$\boxed{2}$ （50 点）【解答】

配点予想

（1）$\angle A_1OA_2 = \theta$ とおくと

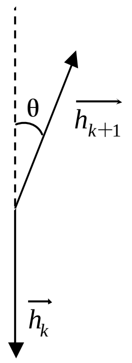


$$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{1}{n}} \quad \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$ 3 点

また，$A_1A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ であり， 述べて 2 点

$A_{k+1}A_{k+2} = A_kA_{k+1}\cos\theta$ （$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）が成り立つ. 5 点

よって　$A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos^{k-1}\theta$ となるから，求める内積は 　A_kA_{k+1} に 5 点



$$\vec{h_k}\cdot\vec{h_{k+1}} = A_kA_{k+1}\cdot A_{k+1}A_{k+2}\cdot \cos(\pi-\theta)$$ 5 点

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\cos^{k-1}\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cos^{k}\theta\cdot(-\cos\theta)$$

$$= -\frac{1}{n}\cos^{2k}\theta \quad = -\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \quad \cdots（答）$$ 5 点

（2）
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right\}$$ 3 点

$$= -\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$ 5 点

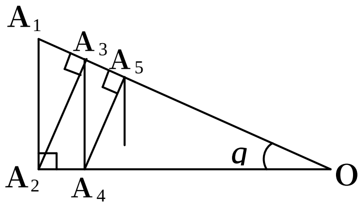
$$= -\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$ となる. 5 点

ここで，
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e}$$ 7 点

であるから，求める極限値は　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n = -1\cdot\left(1-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}-1$　$\cdots$（答） 5 点

$\boxed{2}$ 【解説】



右のような図において，各線分の長さの和（極限値）を求める問題は基本的で，どんな問題集にもあるから，一度はやったことがあるだろう．この問題では，なす角も考えてベクトルの内積の無限級数の極限値を求める問題になっている．

$\vec{h_k}$ と $\vec{h_{k+1}}$ のそれぞれの大きさは公比 $\cos q$ の等比数列になっているのですぐ求められるだろうが，なす角が鈍角であることに注意しないと，うっかり符号ミスをすることになる．

（1）の結果が，$\vec{h_k}\cdot\vec{h_{k+1}} = -\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k$ となった段階で，（2）の極限値が自然対数の底 e を含む式になることは容易に想像できる．

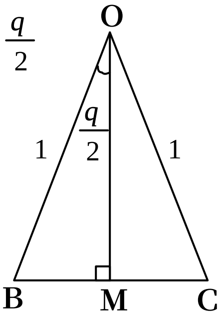
この問題では，親切にも $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ を使え，という指示があるので（「用いてもよい」というのは優しい言い方だが，逆に制約されてしまうので困る），多くの受験生はこれを見て「そんなの知ってるよ」と思いながら，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{(-n)}\right)^{-n}\right\}^{-1} = e^{-1}$ と変形して求める人もいるだろうが，厳密に言うと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ を使ったことにならないので減点される可能性がある．

同様に，極限値が自然対数の底 e になる問題が 2005 年度東北大学理系学部第３問にある．こちらは確率の問題で，期待値の極限値が e になるという面白い（でもなかなか難しい）問題であったから，ベクトルの内積の問題で e が答に出てくるのはなんら不思議ではないだろう．東北大を受験する人は，公式を丸暗記しないで，厳密な定義をしっかり覚えて正しい式変形ができるようにしておかなければならない．

3 （50 点）【解答】

△ＯＡＢ≡△ＯＢＣ≡△ＯＣＡより，△ＡＢＣは正三角形であるから，
△ＡＢＣの外心と重心Ｇは一致する．また，ＯＡ＝ＯＢ＝ＯＣより，
点Ｏから△ＡＢＣに下ろした垂線の足は△ＡＢＣの外心と一致するから，
ＯＧは△ＡＢＣに対して垂直である．

(1) **辺ＢＣの中点をＭとすると，** $\angle \mathrm{BOM}=\dfrac{q}{2}$ **より，** $\mathrm{BM}=\sin\dfrac{q}{2}$



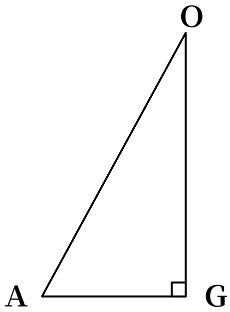
$$\therefore \mathrm{BC}=2\sin\frac{q}{2}$$

また，$\triangle\mathrm{ABC}$ **は正三角形だから** $\mathrm{AM}=\sqrt{3}\sin\dfrac{q}{2}$

$$\therefore \mathrm{AG}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\frac{2}{3}\times\sqrt{3}\sin\frac{q}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{q}{2} \quad \cdots\text{（答）}$$

（$\dfrac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{1-\cos q}$ **も正解 ⇒ 【解説】を見よ**）

さらに，$\triangle\mathrm{OAG}$ **は直角三角形だから**



$$\mathrm{OG}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AG}^2}$$
$$=\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{q}{2}} \quad \cdots\text{（答）}$$

（$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+2\cos q}$ **も正解 ⇒ 【解説】を見よ**）

(2) **四面体ＯＡＢＣの体積を V とすると，**

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OG}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2\sin\frac{q}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{p}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{q}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\sin^4\frac{q}{2}-\frac{4}{3}\sin^6\frac{q}{2}}$$

ここで $\sin^2\dfrac{q}{2}=x$ **とおくと，** $\mathrm{V}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2-\dfrac{4}{3}x^3}\quad\left(0<x<\dfrac{3}{4}\right)$ **である．**

（⇒次ページにつづく）

配点予想

- **述べて** 5 **点**
- 5 **点**
- 5 **点**
- 5 **点**
- 5 **点**
- 5 **点**
- **おきかえて** 3 **点**
- x **の範囲に** 2 **点**

さらに $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x^3$ とおくと，

$f'(x)=2x-4x^2=2x(1-2x)$ となるから，以下の増減表を得る．

x	0	・・・	$\frac{1}{2}$	・・・	$\frac{3}{4}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{12}$	↘	

以上より， $f(x)$ が最大のとき V も最大となるから，

$x=\frac{1}{2}$ すなわち $q=\frac{p}{2}$ のとき，

体積 V の最大値は $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{6}$ …（答）

配点予想

2 点

増減表に 5 点

q の値に 3 点

5 点

$\boxed{3}$ 【解説】

ベクトルを使った解法もある．すなわち，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad \text{および} \quad \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

と表せるから，$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\cos\theta$ より，

$$\left|\overrightarrow{OG}\right|^2=\frac{3(1+2\cos\theta)}{9} \qquad \text{ゆえに OG}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+2\cos\theta}$$

$$\left|\overrightarrow{AG}\right|^2=\frac{2(1-\cos\theta)}{3} \qquad \text{ゆえに AG}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{1-\cos\theta}$$ となる．

△ＯＡＢにおいて余弦定理より AB＝$\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ であるから，四面体の体積Ｖは，

Ｖ＝$\frac{1}{6}(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}$ となり，$\cos\theta=x$ とおいて，（$-\frac{1}{2}<x<1$）

$$\mathrm{V}=\frac{1}{6}(1-x)\sqrt{1+2x}=\frac{1}{6}\sqrt{(1-x)^2(1+2x)}=\frac{1}{6}\sqrt{2x^3-3x^2+1}$$

と変形し，$f(x)=2x^3-3x^2+1$ として，3 次関数 $f(x)$ の最大値を求めればよい．

（$x=0$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)$ の最大値は 1 となる）

なお，ＯＡ＝ＯＢ＝ＯＣをみたす四面体において，点Ｏから△ＡＢＣに垂線を下ろすと，その垂線の足が△ＡＢＣの外心となることは基本的な性質だから覚えていなければならない．（垂線の足をＨとすると，直角三角形の合同条件より△ＯＡＨ≡△ＯＢＨ≡△ＯＣＨとなるからである）
さらに△ＡＢＣが正三角形であることから，外心と重心が一致するので，ＯＧは△ＡＢＣに対して垂直となるのである．これ自体を証明する入試問題もあるが，ここでは定理として述べるだけでよいだろう．

この程度の立体ならイメージするのはたやすいだろうが，Java で動かせるグラフィクスを作ったので，ここをクリックしてみてほしい．

なお，養賢ゼミナールの前期数学ⅡＢテキスト付属の数学新聞第１２号の No. 3 に同じ問題があるので（もちろん答も同じ）前期の復習をしていた養賢生は難なく解けただろう．

4　（50 点）【解答】

配点予想

題意より，点 P の座標が ±1，±2，……，±6 のいずれかであるとき，

$\dfrac{1}{6}$ の確率で原点に移動し，$\dfrac{5}{6}$ の確率で ±1，±2，…，±6 のいずれかの座標の点へ移動する．

述べて 5 点

（1）　1 回目，2 回目で原点以外の点に移動し，3 回目で原点に移動すればよい．最初の点 P の座標が 1，2，……，6 のいずれかであるから求める確率は

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216}\quad\cdots（答）$$

10 点

（2）　1 回目から $(m-1)$ 回目までは原点以外の点に移動し，m 回目で原点に移動すればよい．最初の点 P の座標が 1，2，……，6 のいずれかの座標の点であるから求める確率 p_m は

$$p_m=\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\quad\cdots（答）$$

10 点

（3）　1 回目のサイコロの目で場合分けする．

（ i ）1 回目のサイコロの目が 2，3，4，5，6 のとき，
サイコロを 1 回振ると点 P は 6，5，4，3，2 のいずれかの座標の点へ移動する．ゆえに，n 回サイコロを振って原点に移動する確率は

（2）より　$\dfrac{5}{6}\times p_{n-1}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}$　（ただし，$n\geqq2$）

5 点

（ii）1 回目のサイコロの目が 1 のとき，
サイコロを 1 回振ると点 P は座標 7 の点に移動し，さらにもう 1 回サイコロを振ると点 P は 1，2，…，6 のいずれかの座標の点へ移動する．ゆえに n 回サイコロを振って原点に移動する確率は（2）より

$$\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}\times p_{n-2}=\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\qquad（ただし，n\geqq3）$$

5 点

（ i ）（ii）は互いに排反であるから，$n\geqq3$ のとき求める確率 q_n は

排反　に 1 点

$$q_n=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}+\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}=\frac{31}{216}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

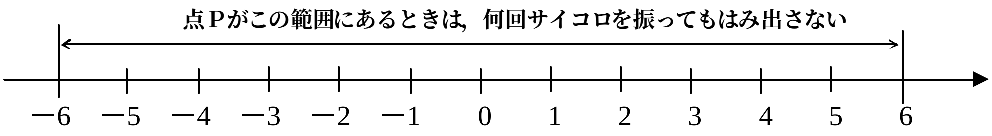
4 点

$$\left.\begin{array}{l}\text{ゆえに，}n=1\text{ のとき }q_1=0,\quad n=2\text{ のとき }q_2=\dfrac{5}{36}\\[2ex] \qquad n\geqq3\text{ のとき }q_n=\dfrac{31}{216}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}\end{array}\right\}\ （答）$$

10 点

$\boxed{4}$ 【解説】

初めに気付くべきことは，
「点Pの座標が $-6 \leqq a \leqq 6$ にあるときは，何回サイコロを振っても $-6 \leqq a \leqq 6$ の範囲でしか動けない」…（＊）ということである．



（1）は $6^3 = 216$ 通りの目の出方のうち，原点で終了するのは何通りあるかを地道に数えていけば $5\times5 = 25$ 通りとわかるが，それでは（2）以降に進めない．（1）を考えることで（＊）に気づけよ，という出題者の配慮なのだから，もっと簡単に考えて

点 P の座標が ±1，±2，……，±6 のいずれかであるとき，

$\dfrac{1}{6}$ の確率で原点に移動し，$\dfrac{5}{6}$ の確率で ±1，±2，…，±6 のいずれかの座標の点へ移動する

として，これらの確率の積を考えていこう．

また，（2）は（3）のヒントなのだから，座標が 8 の点から 6 以下の点に移動したあとは（2）で求めた p_m を用いて式を作っていけばよい．なお，1 回目のサイコロの目が 1 のときと，2〜6 のときは「互いに排反である」ことは必ず述べるようにしよう．

5 （50 点）【解答】

	配点予想
$\left((\cos t)A+(\sin t)B\right)^2=(\cos^2 t)A^2+(\cos t\sin t)(AB+BA)+(\sin^2 t)B^2$ ・・・①となる．	5 点
ここで，	
$A^2=\begin{pmatrix}1 & a+1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a+1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$ （E は単位行列）	2 点
$B^2=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & a^2\end{pmatrix}=a^2E$	2 点
また， $AB=\begin{pmatrix}1 & a+1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+2 & -a(a+1)\\ -2 & a\end{pmatrix}$	2 点
および $BA=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a+1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a(a+1)\\ 2 & 3a+2\end{pmatrix}$ より，	2 点
$AB+BA=\begin{pmatrix}4a+2 & 0\\ 0 & 4a+2\end{pmatrix}=2(2a+1)E$ となる．	2 点
以上より①は，	
$\left((\cos t)A+(\sin t)B\right)^2=\left\{a^2\sin^2 t+2(2a+1)\cos t\sin t+\cos^2 t\right\}E$ ・・・②と表せる．	5 点
よって， $\left((\cos t)A+(\sin t)B\right)^2=O$ となるための条件は，②より	
$a^2\sin^2 t+2(2a+1)\cos t\sin t+\cos^2 t=0$	5 点
(ｉ) $\cos t\neq 0$ のとき，上式の両辺を $\cos^2 t$ で割って，	$\cos t\neq 0$ に 2 点
$a^2\tan^2 t+2(2a+1)\tan t+1=0$	5 点
$\tan t$ についての 2 次方程式と見て， $\tan t$ が存在するためには，	
判別式 $\dfrac{D}{4}=(2a+1)^2-a^2\geqq 0$	5 点
$(3a+1)(a+1)\geqq 0$ $\therefore a\leqq -1$ または $-\dfrac{1}{3}\leqq a$	5 点
(ⅱ) $\cos t=0$ のときは， $\left((\cos t)A+(\sin t)B\right)^2=B^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & a^2\end{pmatrix}=a^2E=O$	
よって， $a=0$ であればよい．	3 点
以上(ｉ)，(ⅱ)をまとめて，求める a の範囲は	
$a\leqq -1$ または $-\dfrac{1}{3}\leqq a$ …(答)	5 点

$\boxed{5}$ 【解説】

$A=\begin{pmatrix}1 & a+1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ や $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & -a\end{pmatrix}$のような行列（一つの成分が 0 である）をそれぞれ，「上三角行列」

「下三角行列」という．三角行列は，n 乗（n は自然数）に規則性があるから，上のような解法，すなわち左辺をいったん $((\cos t)A+(\sin t)B)^2=(\cos^2 t)A^2+(\cos t\sin t)(AB+BA)+(\sin^2 t)B^2$ と展開する方法がすっきりしてわかりやすく，計算ミスも防げるだろう．案の定，

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$$

となるからまとめやすくなる．ただし，基本的なことであるが，$AB\neq BA$であるから，$(\cos t\sin t)(AB+BA)$ のところはまとめられないことに注意しよう．AB と BA をそれぞれ計算しなければならない．

そして計算したのちに，条件式 $a^2\sin^2 t+2(2a+1)\cos t\sin t+\cos^2 t=0$ を導き出せば，あとは行列に何の関係もない三角関数の問題となる．ここから左辺を合成する方法もあるが，計算が面倒なのでおススメできない．行列の問題から始まって三角関数を考える問題は 1993 年度東北大学理系前期でも出題されているが，こちらはずっと簡単で，合成をして最大値・最小値を求める．

昨年度の国公立および私立大学入試において，行列の問題は「一次変換」の問題が多く出題されていたので，準備していた受験生も多かったのではないだろうか．東北大では 2004 年度前期の入試で，この 1 次変換を思わせる（行列Aは y 軸に関して対称移動，行列Bは直線 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ に関して対称移動）ような面白い問題が出題されていたが，今回は当てが外れたようだ．東北大ならば面白い問題を作ってくれるに違いない．来年度に期待することにしよう．

$\boxed{6}$ （50 点）【解答】

（1） Pは円C上の点より

P$(\cos a$, $\sin a)$とおけて,

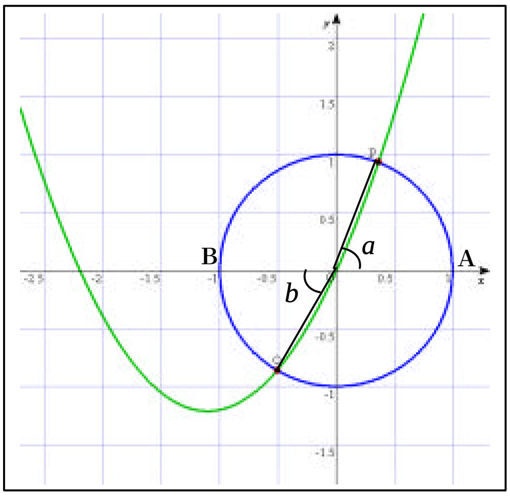
曲線 $y=x^2+2kx$ 上にもあるから,

$\sin a=\cos^2 a+2k\cos a$

$\cos a\neq 0$ より,

$$k=\frac{\sin a-\cos^2 a}{2\cos a}$$

$$=\frac{1}{2}(\tan a-\cos a)\quad \cdots\text{（答）}$$



（2） 求める面積は,

(扇形ＯＰＢＱの面積)＋(曲線 $y=f(x)$ と直線ＯＰで囲まれた部分の面積)

＋(曲線 $y=f(x)$ と直線ＯＱで囲まれた部分の面積)である.

ここで，Q$(-\cos b$, $-\sin b)$と表せて,

直線ＯＰ： $y=(\tan a)x$， 直線ＯＱ： $y=(\tan b)x$ より,

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(p-a+b)+\int_{-\cos b}^{0}\left\{(\tan b)x-(x^2+2kx)\right\}dx$$

$$+\int_{0}^{\cos a}\left\{(\tan a)x-(x^2+2kx)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}(p-a+b)-\int_{-\cos b}^{0}x(x+\cos b)dx-\int_{0}^{\cos a}x(x-\cos a)dx$$

$$=\frac{1}{2}(p-a+b)+\frac{1}{6}\left(\cos^3 b+\cos^3 a\right)\quad\cdots\text{（答）}$$

（3） $k\to\infty$ のとき，（1）より $\tan a\to\infty$ といえるから（$\because\ 0<\cos a<1$）

$a\to\dfrac{p}{2}$ となる．同様に， $b\to\dfrac{p}{2}$ となるから,

$\cos b\to 0$， $\cos a\to 0$ より， $\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)=\frac{p}{2}$ $\cdots$（答）

配点予想

5 点

$\cos a\neq 0$ に 2 点

5 点

3 点

述べて 5 点

2 つで 3 点

7 点

10 点

述べて 5 点

5 点

$\boxed{6}$ 【解説】

k の式は $\dfrac{1}{2}(\tan a - \cos a)$ の形に整理しておこう．曲線 $y = f(x)$ と直線ＯＰで囲まれた部分の面積と，曲線 $y = f(x)$ と直線ＯＱで囲まれた部分の面積は次の公式を使って求めるので，（1）の答は（2）につながる形が最もよいのである．

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

この公式の使い方がわかっている人は，途中の式を書かなくても答がわかる．答がわかってから，ゆっくり答案を整理していくと気持ちに余裕ができるだろう．

（3）は k の値が増えるにつれて，下の図のように放物線が移動するので，そのイメージがつかめれば $k \to \infty$ のとき，$a \to \dfrac{p}{2}$， $b \to \dfrac{p}{2}$ となることは容易にわかるだろう．