2009年度　東北大学（文系）数学解答・解説および配点予想

ここでは文系数学の満点を 200 点満点で考えています。学部学科によっては満点が異なる場合がありますが、採点基準は共通であると考えられます。

$\boxed{1}$　（50 点）【解答】

$2^x = t \quad (t > 0)$　とおくと

$$2^{2x+2} + 2^x a + 1 - a$$

$$= 4(2^x)^2 + a \cdot 2^x + 1 - a$$

$$= 4t^2 + at + 1 - a$$

$f(t) = 4t^2 + at + 1 - a$ とする．

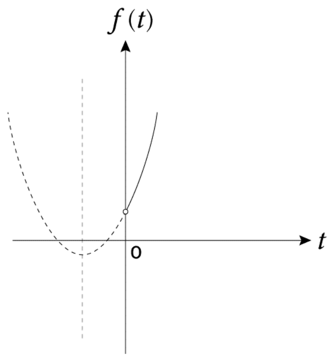
ここで $f(t) = 4\left(t + \dfrac{a}{8}\right)^2 - \dfrac{a^2}{16} - a + 1$

（ｉ）　$-\dfrac{a}{8} < 0$　つまり　$a > 0$ のとき

$t > 0$ において $f(t) > 0$ になるための条件は

$f(0) = 1 - a \geqq 0$　つまり　$a \leqq 1$

よって　$0 < a \leqq 1$.



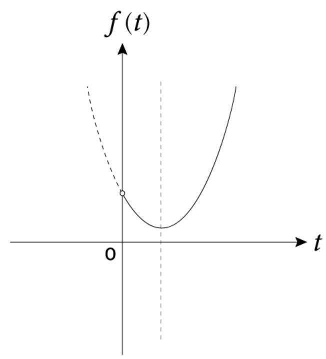
（ⅱ）　$-\dfrac{a}{8} \geqq 0$　つまり　$a \leqq 0$ のとき

$t > 0$ において　$f(t) > 0$ になるには

$$f\left(-\frac{a}{8}\right) = -\frac{a^2}{16} - a + 1 > 0$$

つまり　$-8 - 4\sqrt{5} < a < -8 + 4\sqrt{5}$

よって　$-8 - 4\sqrt{5} < a \leqq 0$



（ｉ）（ⅱ）より　$-8 - 4\sqrt{5} < a \leqq 1$　　・・・（答）

配点予想

t への置き換え 3 点

$t > 0$　2 点

このパート

計 5 点

場合分け 10 点

（ｉ）15 点

（ⅱ）15 点

それぞれ不等号のミスや計算ミスにおいて減点

このパート

計 40 点

（ｉ）（ⅱ）をまとめて 5 点

$\boxed{1}$ 【解説】

今回は置き換えによる解法で考えた．$2^x = t$ としたときに $t > 0$ を忘れないように．こうすれば

『 $t > 0$ の実数に対して

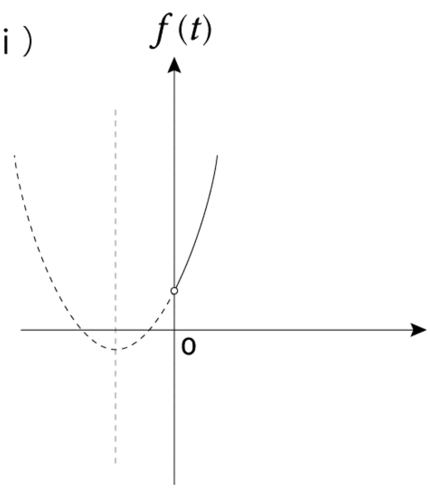
$$4t^2 + at + 1 - a > 0$$

が成り立つような実数 a の範囲を求めよ 』

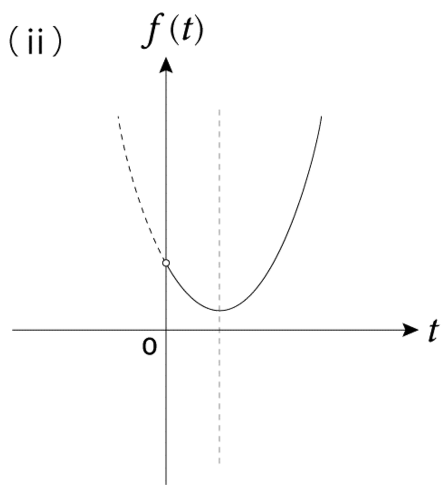
という 2 次関数の問題に帰着することができる．

あとは

（ｉ）



（ii）



（ｉ）（ii）のように軸 $\left(t = -\dfrac{a}{8}\right)$ の位置によって，題意を満たす条件を場合ごとに求める．

（ｉ）の条件において，$t > 0$ なので $f(0) = 0$ でも条件を満たすことに注意すること．

よって，$f(0) \geqq 0$

（ii）においては，$f\left(-\dfrac{a}{8}\right) > 0$ としたが，$f(t) = 0$ の判別式 $D < 0$ を用いてもよい

最後に（ｉ）（ii）で求めた条件を合わせて $-8-4\sqrt{5} < a \leqq 1$ とするのを忘れないようにしよう．

$\boxed{2}$ （50 点）【解答】

配点予想

（１）　$t = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

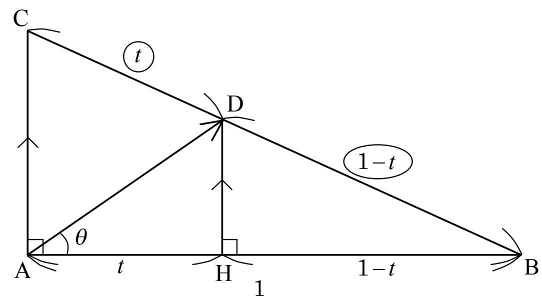
$= \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \cos\theta$

$= \mathrm{AD}\cos\theta$　（$\because$ $\mathrm{AB} = 1$）

$= \mathrm{AH}$

点 H は線分 AB 上にあるので，

$0 \leqq t \leqq 1$　・・・(答)



$\left(\angle\mathrm{BAD} = \theta,\ \mathrm{D}\text{からAB}\text{におろした垂線の足をH}\text{とする.}\right)$

t の意味を明らかにして 15 点

t の範囲を答えて 5 点

（２）　A を原点としたときの B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ

$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}$

$\vec{d} \cdot \vec{c} = \left(\vec{d} - \vec{c}\right) \cdot \left(-\vec{c}\right)$

$2\vec{d} \cdot \vec{c} = \left|\vec{c}\right|^2$　・・・（＊）

（＊）の式を求めて 10 点

ここで AC // HD に注意すると

$\mathrm{CD} : \mathrm{DB} = \mathrm{AH} : \mathrm{HB} = t : (1-t)$

になるので，

$\vec{d} = (1-t)\vec{c} + t\vec{b}$

$\vec{d}$ を求めて 10 点

これを（＊）に代入すると，

$2\left\{(1-t)\vec{c} + t\vec{b}\right\} \cdot \vec{c} = \left|\vec{c}\right|^2$

$2(1-t)\left|\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{c}\right|^2$　（$\because$ $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$）

$2(1-t) = 1$　（$\because$ $\left|\vec{c}\right|^2 \neq 0$）

$\therefore\ t = \dfrac{1}{2}$　・・・(答)

t を求めて 10 点

$\boxed{2}$ 【解説】

（1） まずtの図形的な意味に気づくべきである．$t = \mathrm{AH}$ なのだ。（$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 上への正射影ベクトルという.）単なる内積という視点では物足りない．これさえ気づけばHは線分AB上にあり，$\mathrm{AB} = 1$なのだから，答はほとんど自明である．

（2） 方針が立たなくとも，条件式は（＊）の形に計算しておこう．それだけでもいくらか点数につながる．

重要なポイントは$\mathrm{CD} : \mathrm{DB} = t : (1 - t)$に気づくかどうかだ．三角形の相似を持ち出すまでもなく，$\mathrm{AC} \mathbin{/\!/} \mathrm{HD}$ より明らかだ．すると，$\vec{d}$ を$\vec{c}$ と$\vec{b}$ で表せる．

あとは（＊）に代入するだけだ．$\vec{c} \perp \vec{b}$ なのでほとんど計算はいらない．直接的な単純計算のみですぐ答えにたどり着く．

本問は計算力をほとんど必要としない．また，ごく簡単な図形の性質しか使わない．結果的には単純明快な問題だと言える．だが，試行錯誤を重ねた受験生も多いと予想される．受験生にとっては扱いづらい問題かもしれない．

養賢ゼミナール生は，前期テキスト数学B「ベクトル」のテキスト問題３－２で正射影ベクトルについては学習しているので，確認しておこう．

$\boxed{3}$ （50 点）【解答】

	配点予想
取り出した玉を左から一列に並べることを考える.	6 点
(1) 初めの 4 個の玉の並べ方は，10・9・8・7 通りある.	2 点
また，4 個目はどの赤玉かを考えて 3 通りあり，	2 点
初めの 3 個の青玉の並べ方は 7・6・5 通りあるから，求める確率は	2 点
$\dfrac{3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \dfrac{1}{8} \cdots$(答)	6 点
(2) 初めの 8 個の玉の並べ方は，10・9・8・7・6・5・4・3 通りある.	2 点
また，赤玉の並べ方は 8・7・6 通りあり，	2 点
青玉の並べ方は 7・6・5・4・3 通りあるから，求める確率は	2 点
$\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \dfrac{7}{15} \cdots$(答)	8 点
(3) 初めの 8 個の玉の並べ方は，10・9・8・7・6・5・4・3 通りある.	2 点
また，8 個目はどの赤玉かを考えて 3 通りあり，	2 点
残りの 2 個の赤玉の並べ方は 7・6 通りある.	2 点
青玉の並べ方は 7・6・5・4・3 通りあるから，求める確率は	2 点
$\dfrac{3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \dfrac{7}{40} \cdots$(答)	10 点

$\boxed{3}$ 【解説】

この問題のように，取り出した玉を袋に戻さないときに何回目に取り出した玉が何個目の何色かというような問題では，【解答】にあるように取り出した玉を左から一列に並べる並べ方を考えるのが定石である．【解答】では，4 個目または 8 個目までの玉についてのみ考えて式を作ったが，10 個すべての玉の並べ方を考えて次のような式を作った方が，一見面倒に見えるが青玉の並べ方を考えなくてよいのでわかりやすいと感じる人もいるだろう．

【別解】

(1) 10 個全部の玉の並べ方は 10！通りある．
また，4 個目はどの赤玉かを考えて 3 通り，残り 2 個の赤玉の並べ方は 6・5 通りあり，
さらに 7 個すべての青玉の並べ方は 7！通りあるから，
求める確率は，$\dfrac{3\cdot 6\cdot 5\cdot 7!}{10!}=\dfrac{3\cdot 6\cdot 5}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{1}{8}\cdots$(答)

(2) 10 個全部の玉の並べ方は 10！通りある．
また，赤玉の並べ方は 8・7・6 通りあり，青玉の並べ方は 7！通りあるから，
求める確率は，$\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 7!}{10!}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{7}{15}\cdots$(答)

(3) 10 個全部の玉の並べ方は 10！通りある．
また，8 個目はどの赤玉かを考えて 3 通り，残り 2 個の赤玉の並べ方は 7・6 通りあり，
さらに青玉の並べ方は 7！通りあるから，
求める確率は，$\dfrac{3\cdot 7\cdot 6\cdot 7!}{10!}=\dfrac{3\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{7}{40}\cdots$(答)

養賢ゼミナール生は，前期数学ＩＡテキストの第 20 講例題 3 に同様の問題があり，以上のような【別解】を先に学習しているので確認してほしい．

$\boxed{4}$ （50 点）【解答】

与えられた不等式の絶対値をはずすと

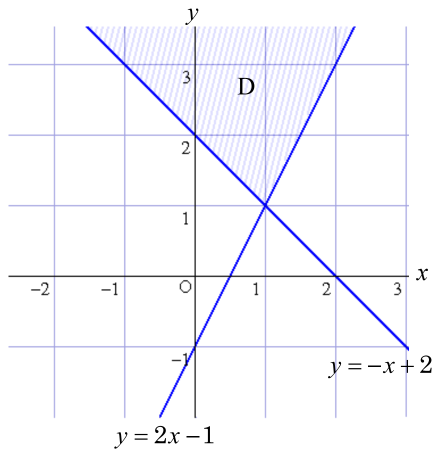
$x \geqq 1$ のとき

$$2y > x+1+3(x-1) \qquad y > 2x-1$$

$x < 1$ のとき

$$2y > x+1-3(x-1) \qquad y > -x+2$$

よって，不等式の表す領域 D は
右図の斜線部分である．
ただし，境界線を含まない．



　放物線 C 上の点がすべて D の
点となるための条件は，
C が 2 直線 $y=2x-1$ と $y=-x+2$
の上側にあることである。

$x^2-2ax+a^2+a+2 > 2x-1$ より

$$x^2-2(a+1)x+a^2+a+3 > 0 \quad ・・・①$$

$x^2-2ax+a^2+a+2 > -x+2$ より

$$x^2-(2a-1)x+a^2+a > 0 \quad ・・・②$$

①，②がすべての実数 x に対して成り立つためには
それぞれ（左辺）$=0$ の判別式が負であればよいから

①より　$(a+1)^2-(a^2+a+3) < 0$

$$\therefore a < 2$$

②より　$(2a-1)^2-4(a^2+a) < 0$

$$\therefore a > \frac{1}{8}$$

したがって，求める a の範囲は

$$\frac{1}{8} < a < 2 \quad ・・・(答)$$

配点予想

3 点

3 点

領域が図示できて，8 点

述べて 5 点

3 点

3 点

述べて 5 点

5 点

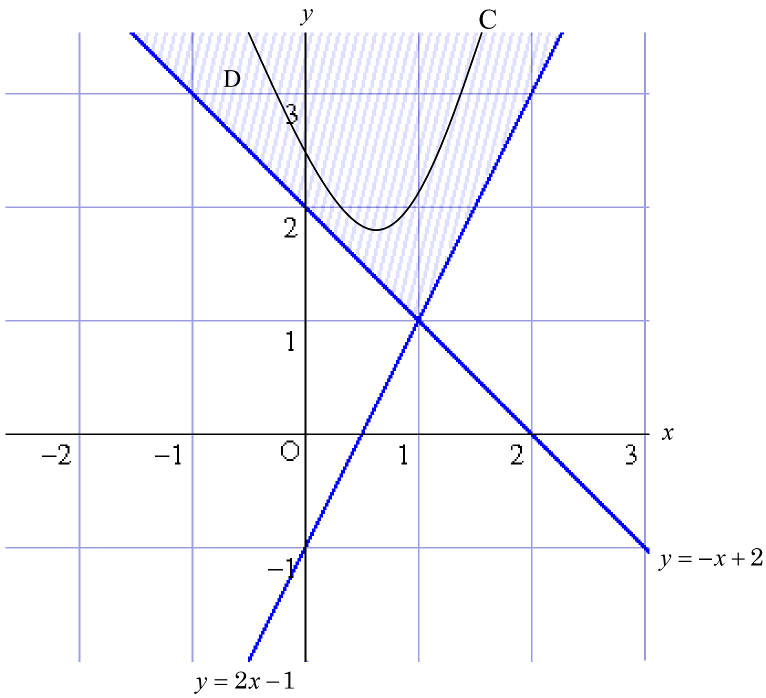
5 点

10 点

$\boxed{4}$ 【解説】

まず，場合分けをして与えられた不等式の絶対値をはずし，不等式が表す領域 D を図示する．境界線は含まない．ここまでは基本的なので，確実に解きたい．

このとき，「放物線 C 上の点がすべて D の点となる」とは，放物線 C が領域 D の中にスッポリ入っているということである．すなわち，放物線 C が境界線の 2 直線 $y=2x-1$ と $y=-x+2$ の上側にあればよい．



「解答」のように，①，②の不等式がすべての実数 x に対して成り立つための条件として，それぞれ（左辺)=0 の判別式が負であればよいとしても解けるし，あるいは，それぞれ左辺を y とおいた下に凸の放物線が x 軸の上側にある条件，すなわち(頂点の y 座標)＞0 としてもよい．

なお，放物線 C の頂点の座標は $(a,\ a+2)$ であるから，頂点は直線 $y=x+2$ 上にある．

この問題は，受験生の考える力を見る基本的な良問と言えよう．