2009年度 東北大学(理系) 数学解答･解説および配点予想

ここでは理系数学の満点を 300 点満点で考えています。学部学科によっては満点が異なる場合がありますが、採点基準は共通であると考えられます。

$\boxed{1}$ (50 点)【解答】

配点予想

(1) (左辺)－(右辺)＝$a^3+b^3-c^3+3abc$

＝$(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$＝0 (∵ $a+b-c$＝0 より)

となるから, $a^3+b^3+3abc=c^3$ は成り立つ.

(証明終)

変形して15 点
(∵に5 点)

(2) (左辺)－(右辺)＝$a^3+b^3-c^3+3abc$

＝$(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

＝$(a+b-c)\times\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right\}\geqq 0$

(∵ $a+b-c\geqq 0$, $(a-b)^2\geqq 0$, $(b+c)^2\geqq 0$, $(c+a)^2\geqq 0$ より) となるから, $a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ は成り立つ. 等号が成立するのは, $a+b=c$ または$a=b=-c$ のときである.

(証明終)

変形して15 点
(∵に5 点)

等号成立条件に
10 点

$\boxed{1}$ 【解説】

次の公式を覚えていれば難しくない．あとは，c を $-c$ に置き換えるだけである．

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$$

養賢ゼミナール生は，前期数学ⅠＡテキストの巻末にある数学ⅠＡポイント集に載っているので，覚えているだろう．また，後期難関大への数学ⅠＡⅡＢテキストでは，この公式を用いて３変数の相加平均・相乗平均の大小関係が成り立つことを証明しているので，この式変形も知っているはずである．高３生は後期ハイレベル数学ⅡＢで2001年度津田塾大の問題を題材にして学習しているから確認してほしい．なお，次のような別解もあるが，実際の入試本番で書くのは厳しいだろう．

【別解】　$f(c)=a^3+b^3+3abc-c^3$ とおく．　c の３次関数として考える

(1)　$a+b=c$ であるとき，

$f(a+b)=a^3+b^3+3ab(a+b)-(a+b)^3=(a+b)^3-(a+b)^3=0$ となる．

ゆえに，与えられた等式は成り立つ．　(証明終)

(2)　$f(c)\geqq 0$ が成り立つことを示す．まず，$f'(c)=3ab-3c^2=3(ab-c^2)$ である．

$ab\leqq 0$ のとき，$f'(c)\leqq 0$ より，$f(c)$ は単調減少するから，

$a+b\geqq c$ のとき，$f(c)\geqq f(a+b)=0$ $\therefore f(c)\geqq 0$ （等号成立は $a+b=c$ のとき）

$ab>0$ のとき，$f'(c)=0$ をみたすのは，$c=\pm\sqrt{ab}$ である．

（ｉ）$a>0$，$b>0$ のとき，(相加平均)≧(相乗平均)より，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}>\sqrt{ab}$ であるから，

$f(c)$ の増減は右の表のようになる．ここで，

c	$\cdots$	$-\sqrt{ab}$	$\cdots$	$\sqrt{ab}$	$\cdots$	$a+b$
$f'(c)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(c)$	↘	極小	↗	極大	↘	0

$$f(-\sqrt{ab})=a^3+b^3-3ab\sqrt{ab}-\left(-\sqrt{ab}\right)^3$$

$$=a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}=\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)^2\geqq 0$$ となるから，$f(c)\geqq 0$ は成り立つ．

等号成立は $a+b=c$ のとき，または $a\sqrt{a}=b\sqrt{b}$ $\Leftrightarrow$ $a^3=b^3$　両辺を２乗した

a，b は実数より $a=b$ となり，このとき $c=-\sqrt{ab}=-\sqrt{a^2}=-|a|=-a$ となる．

（ⅱ）$a<0$，$b<0$ のとき，$-a>0$，$-b>0$ だから，(相加平均)≧(相乗平均)より，

$-(a+b)\geqq 2\sqrt{(-a)(-b)}=2\sqrt{ab}>\sqrt{ab}$ $\therefore a+b<-\sqrt{ab}$ であるから，$a+b\geqq c$ のとき

$f(c)$ は単調減少し，$f(c)\geqq f(a+b)=0$ $\therefore f(c)\geqq 0$ （等号成立は $a+b=c$ のとき）

以上より，$f(c)\geqq 0$ となるので，与えられた不等式は成り立つ．

（等号成立は，$a+b=c$ または $a=b=-c$ のとき）　　(証明終)

$\boxed{2}$ （50 点）【解答】　　　　　　　　　　　　配点予想

(1)　長方形Aは，縦 1cm，横 $L+1+L(L-1)$ cm であるから，　4 点

$$S_1 = L+1+L(L-1) = L^2+1 \quad \cdots(\text{答})$$　5 点

長方形Bは，横 $L+1$ cm，縦 $1+(1-a)(L-1)$ cm であるから，　4 点

$$\begin{aligned} S_2 &= (L+1)\{1+(1-a)(L-1)\} \\ &= (L+1)\{1+(1-a)(L-1)\} \\ &= L^2 - aL^2 + L + a \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$　5 点

(2)　$S_1 - 1 < S_2$ より，　$L^2 < L^2 - aL^2 + L + a$

$a(L^2-1) < L$　　よって，$a < \dfrac{L}{L^2-1}$　（$\because L \geqq 2$）　5 点

$L=2$ のとき，　$\dfrac{L}{L^2-1} = \dfrac{2}{3}$ となるから，　$0 < a < 1$ より　2 点

求める a の範囲は，　$0 < a < \dfrac{2}{3}$　$\cdots$(答)　5 点

(3)　題意をみたす条件は，$a < \dfrac{L}{L^2-1}$ をみたす 2 以上の自然数 L が存在することである．ここで，$f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$　（$x \geqq 2$）とおくと，　5 点

$f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ となるから，　$f(x)$ は単調減少し，　5 点

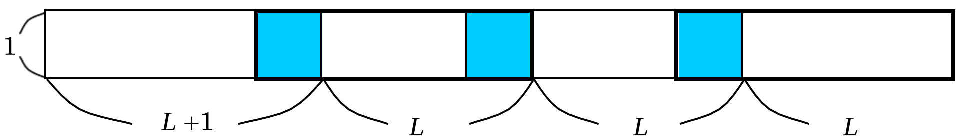
$f(2) = \dfrac{2}{3}$　および　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$　である．　5 点

ゆえに，求める a の範囲は，$0 < a < \dfrac{2}{3}$　$\cdots$(答)　5 点

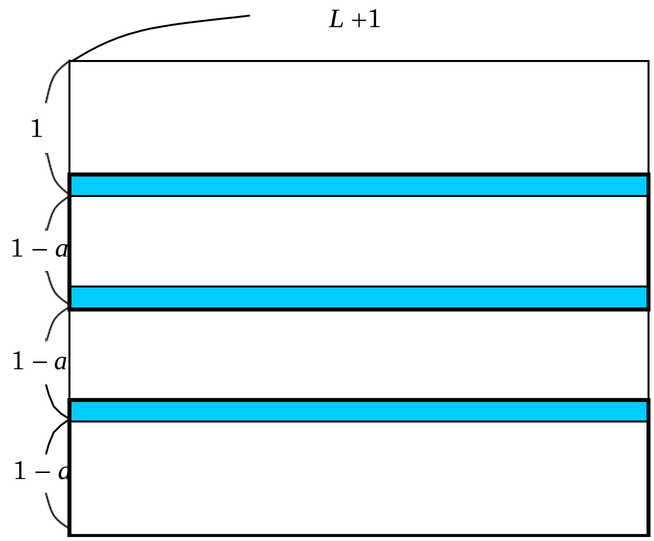
$\boxed{2}$ 【解説】

$L=4$ のときの図で具体的に考えてみよう．見易くなるよう隣り合う紙の枠線の太さを変えてみた．

長方形Ａは，横 $L+1$ の紙が１枚と，横 L の紙が $L-1$ 枚の計 L 枚あると考える．



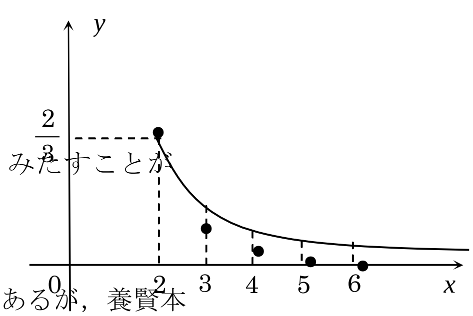
長方形Ｂは，縦１の紙が１枚と，縦 $1-a$ の紙が $L-1$ 枚の計 L 枚あると考える．



このように，問題の意味がつかみにくいときは， L に具体的な数を入れて実際に図をかいてみれば 式の作り方がわかるだろう．

(3)における関数 $f(x)$ は，自然数 L のままでは微分できないので，連続する実数の変数 x を設定した ものである．このような手法は受験数学ではよくあることだ．

$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになるので，その曲線上の「 x 座標が自然数である点」を考えればよい．



これらの点のうちの１個でも直線 $y=a$ より上にあれば題意を みたすことがわかるだろうか.

このような方法で解く問題は，1997 年度の東京大理系第２問に あるが，養賢本科生Ｓクラスでは演習済みであるから当然思い ついたであろう．

3 （50 点）【解答】 取り出した玉を左から一列に並べることを考える.

(1) 初めの4個の玉の並べ方は，10・9・8・7通りある.
また，4個目はどの赤玉かを考えて3通りあり，
初めの3 個の青玉の並べ方は7・6・5 通りあるから，求める確率は

$$\frac{3\times7\times6\times5}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{8}\cdots(\text{答})$$

(2) 初めの 8 個の玉の並べ方は，10・9・8・7・6・5・4・3 通りある.
また，赤玉の並べ方は8・7・6通りあり，
青玉の並べ方は 7・6・5・4・3 通りあるから，求める確率は

$$\frac{8\times7\times6\times7\times6\times5\times4\times3}{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}=\frac{7}{15}\cdots(\text{答})$$

(3) 初めの 8 個の玉の並べ方は，10・9・8・7・6・5・4・3 通りある.
また，8個目はどの赤玉かを考えて3通りあり，
残りの 2 個の赤玉の並べ方は 7・6 通りある. 青玉の並べ方は 7・6・5・4・3 通りあるから，求める確率は

$$\frac{3\times7\times6\times7\times6\times5\times4\times3}{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}=\frac{7}{40}\cdots(\text{答})$$

(4) 取り出されている赤玉が0個のときの確率は，初めの4個がすべて青玉であるから，その並べ方を考えて，

$$\frac{7\times6\times5\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{6}$$

取り出されている赤玉が1 個のときの確率は，どの赤玉を初めの4 個のどこに並べるかを考え，さらに 3 個の青玉の並べ方も考えて，

$$\frac{3\times4\times7\times6\times5}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{2}$$

取り出されている赤玉が2 個のときの確率は，どの赤玉を初めの4 個のどこに並べるかを考え，さらに 2 個の青玉の並べ方も考えて，

$$\frac{3\times4\times3\times7\times6}{10\times9\times8\times7}=\frac{3}{10}$$

取り出されている赤玉が 3 個のときの確率は，

$$1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\right)=\frac{1}{30}$$

ゆえに求める期待値は，$1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}\cdots(\text{答})$

配点予想

(1) 2 点 / 2 点 / 2 点 / 答に 4 点

(2) 2 点 / 2 点 / 2 点 / 答に 4 点

(3) 2 点 / 2 点 / 2 点 / 2 点 / 答に 4 点

(4) 4 点 / 4 点 / 4 点 / 4 点 / 答に 2 点

3 【解説】

「確率はすべての物を区別する」から, 赤玉に R_1, R_2, R_3, 青玉に $B_1 \sim B_7$ と記号をつけて考えよう.
この問題のように，取り出した玉を袋に戻さないときに何回目に取り出した玉が何個目の何色か というような問題では，【解答】にあるように取り出した玉を左から一列に並べる並べ方を考える のが定石である.【解答】では，4 個目または 8 個目までの玉についてのみ考えて式を作ったが， 10 個すべての玉の並べ方を考えて次のような式を作った方が，一見面倒に見えるが青玉の並べ方 を考えなくてよいのでわかりやすいと感じる人もいるだろう.

【別解】

B_1 B_7 B_3 R_1 B_6 B_5 B_2 R_3 B_4 R_2

(1)の並べ方の例

(1) 10 個全部の玉の並べ方は 10！通りある.
また，4 個目はどの赤玉かを考えて 3 通り，残り 2 個の赤玉の並べ方は 6・5 通りあり， さらに 7 個すべての青玉の並べ方は 7！通りあるから，

求める確率は， $\dfrac{3\times6\times5\times7!}{10!}=\dfrac{3\times6\times5}{10\times9\times8}=\dfrac{1}{8}$ ・・・(答)

(2) 10 個全部の玉の並べ方は 10！通りある.
また，赤玉の並べ方は 8・7・6 通りあり，青玉の並べ方は 7！通りあるから，

求める確率は， $\dfrac{8\times7\times6\times7!}{10!}=\dfrac{8\times7\times6}{10\times9\times8}=\dfrac{7}{15}$ ・・・(答)

(3) 10 個全部の玉の並べ方は 10！通りある.
また，8 個目はどの赤玉かを考えて 3 通り，残り 2 個の赤玉の並べ方は 7・6 通りあり， さらに青玉の並べ方は 7！通りあるから，

求める確率は， $\dfrac{3\times7\times6\times7!}{10!}=\dfrac{3\times7\times6}{10\times9\times8}=\dfrac{7}{40}$ ・・・(答)

今回の確率の問題は理系としては，かなり易しい．合格するためには完答するべき問題である． (1)～(3)は文系学部と同じ問題なので，(4)を付け加えたのだろうが，それでもセンター試験レベル である．やはり理系の確率の問題は「 n 個の玉を取り出す」というような，答が n の式になる問題 が適切なレベルではないだろうか． 2002 年度前期および 2008 年度前期の確率の問題は，文系学部 の問題とほぼ同じで，なおかつ理系レベルになるように絶妙に作り変えられていたので，今後もこ れらのような良問が出題されることを期待したい.

なお，養賢生は，前期数学ＩＡテキストの第 20 講例題 3 に，同様の問題で答が n の式というのがあり，上記のような【別解】を先に学習しているので確認してほしい.

$\boxed{4}$ （50 点）【解答】

配点予想

(1)　$a=0$ または $\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(\theta)=\sin\theta$ であるから，　2 点

$$I=\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}=2$$
3 点

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta=\sin(\theta-2a)$ をみたす θ の値は，

$$\sin\theta-\sin(\theta-2a)=2\cos(\theta-a)\sin a=0$$
5 点

よって $\sin a\neq 0$ より，$\theta-a=\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore\ \theta=a+\dfrac{\pi}{2}$ となるから，　5 点

$$\begin{cases} 0\leqq\theta\leqq a+\dfrac{\pi}{2}\text{ のとき，}\ \sin\theta\geqq\sin(\theta-2a) \\ a+\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi\text{ のとき，}\ \sin\theta<\sin(\theta-2a) \end{cases}$$
２つで5 点

ゆえに，$I=\displaystyle\int_0^{a+\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta+\int_{a+\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(\theta-2a)\,d\theta$　7 点

$$=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{a+\frac{\pi}{2}}+\Big[-\cos(\theta-2a)\Big]_{a+\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
3 点

$=2\sin a+\cos 2a+1$　となる．　5 点

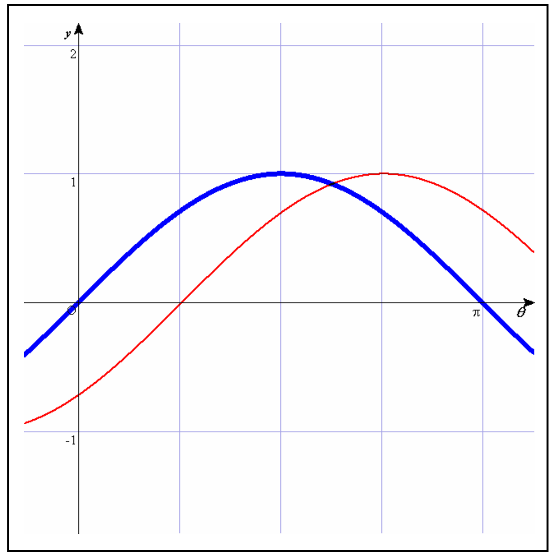
上式は，$a=0$ または $\dfrac{\pi}{2}$ のときも成り立つから，求める定積分は　5 点

$$I=2\sin a+\cos 2a+1\ \cdots\text{(答)}$$

(2)　(1)の結果より，$I=2\sin a+1-2\sin^2 a+1=-2\left(\sin a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$　5 点

となるから，$\sin a=\dfrac{1}{2}$ すなわち $a=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最小値 $\dfrac{5}{2}\cdots$(答)　5 点

$\boxed{4}$ 【解説】



「小さくないほう」というのは「大きいか，または等しいほう」という意味の数学用語である．
グラフにおいては，$y=\sin\theta$ のグラフ(太線)と $y=\sin(\theta-2a)$ のグラフ(細線)のうち，より上にある方（等しいときは $y=\sin\theta$ の方と定義されている）を意味しているので，まずは交点の θ 座標を求めよう．$y=\sin(\theta-2a)$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $2a$ だけ平行移動したものであることはわかるだろう．（右図では $a=0.4$ としてある）

$\sin\theta-\sin(\theta-2a)=0$ の左辺を変形して，
$2\cos(\theta-a)\sin a=0$ とするところは「和⇒積の公式」を用いている．作り方はこうだ．

sin の加法定理を辺々引いて，

$$\begin{array}{rl} & \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ -) & \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \hline & \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta\cdots(*) \end{array}$$

この$(*)$式で，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと，$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$ となることから得られる．

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

大切なのは，丸暗記するのではなく，作り方を覚えることである．そうすれば忘れないし，思い出しやすいので確実だ．また，次のような方法もある．

$\sin\alpha=\sin\beta$ が成り立つとき，$\alpha=\beta+2\pi k$ または $\alpha=\pi-\beta+2\pi k$ （k は整数）

この右端の式を使って，$\theta=\pi-(\theta-2a)$ を解いても $\theta=a+\dfrac{\pi}{2}$ が求められる．

また，定積分する前に，右のようにグラフの上下関係を述べておく必要がある．これを忘れると減点されるので要注意だ．

$0\leqq\theta\leqq a+\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta\geqq\sin(\theta-2a)$

$a+\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi$ のとき，$\sin\theta<\sin(\theta-2a)$

定積分自体は超基本なので，確実に完答したい問題である．東北大理系ならば，もう少し計算が複雑な定積分の問題を出してもよいと思うが，最近の受験生の学力低下を見ての配慮だろうか．養賢生はテストゼミ難関大への数学ⅠＡⅡＢで，2007 年度名古屋市立大の類題を演習しているので，題意をつかむのは容易だっただろう．

5 （50 点）【解答】　　　　配点予想

(1)　与えられた条件を　$APA = P^2$　$\cdots(*)$　とする.

このとき，(左辺)$= P^3A = P^2PA = APAPA$　（$\because(*)$より）

$= APP^2$　（$\because(*)$より）

$= AP^3 =$(右辺) となるから成り立つ.　　15 点

（証明終）

(2)　$APA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2p+bcq & abp+bdq \\ acp+cdq & bcp+d^2q \end{pmatrix}$　　3 点

$P^2 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}$　であるから，　　3 点

与えられた等式　$APA = P^2$　が成り立つ条件は，次の 4 つの方程式

$$\begin{cases} a^2p + bcq = p^2 & \cdots① \\ b(ap+dq) = 0 & \cdots② \\ c(ap+dq) = 0 & \cdots③ \\ bcp + d^2q = q^2 & \cdots④ \end{cases}$$

4 つで 5 点

を同時にみたすことである.　b，　c は実数であるから②と③より，

$b = c = 0$　または　$ap + dq = 0$　　2 つで 5 点

となる.

(i)　$b = c = 0$ のとき，①より $a^2p = p^2$　$\therefore a = \pm\sqrt{p}$　（$\because$ $p > 0$）　　3 点

④より $d^2q = q^2$　$\therefore d = \pm\sqrt{q}$　（$\because q > 0$）　　3 点

またこのとき，$ad - bc = ad > 0$ より a と d は同符号である.　　2 点

(ii)　$ap + dq = 0$ のとき，$q > 0$ より $d = -\dfrac{p}{q}a$ である.　　2 点

また①より，　$bc = \dfrac{p^2 - a^2p}{q}$　であるから，　　2 点

$ad - bc = a \times \left(-\dfrac{p}{q}a\right) - \dfrac{p^2 - a^2p}{q} = -\dfrac{p^2}{q} < 0$　となるので，

与えられた条件 $ad - bc > 0$ をみたさない.　　3 点

以上より，　$A = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{p} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{q} \end{pmatrix}$　（複号同順）$\cdots$(答)　　4 点

5 【解説】

行列で表された式をどう変形するかというとき，

（ｉ） 英大文字（AやP）のまま変形する　　（ii） 成分$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の計算にもちこむ

の２通りの方法があるが，どっちの方法でいくかが大切な分岐点だ．（ｉ)の方法は，行列の問題に慣れていないと変形に迷う人も多いだろうが，計算は楽である．（ii)の方法は，計算は面倒になるが，2　次の正方行列の場合 4 つの連立方程式を同時に解いていくだけなので，行列に慣れていない人でもわかりやすい．　というように，それぞれ長所と短所がある．

(1)は(ｉ)の方法で【解答】を作ってみたが，与えられた条件 $APA=P^2$ をどのように使うかに気付かないとうまくいかないだろう．積の交換法則$P^3A=AP^3$が成り立つことを示すのだから，左辺のPをAの右側にスライドさせていくことを考えれば，$APA=P^2$の使い方が見えてくるだろう．

P がA の右側に
スライドしている

(2)は(1)の等式を利用する解法も考えられるが，$P^3A=AP^3$は$APA=P^2$の必要条件にすぎないので，これだけでは(2)の答を求めるための条件が足りない．あくまでも，与えられた条件は $APA=P^2$ であるから，初めからこの式だけを用いて方法(ii)の成分の計算にもちこむのが近道だろう．

東北大学の行列の問題は，近年の入試で頻出の1次変換の問題などに流されず，方程式の同値性を意識しながら正しく地道な式変形ができることを要求する問題がしばしば出題されている．ただ，2004 年度前期の行列の問題のように, 1 次変換を背景としながらそれを前面に出さない秀逸な問題も出題されているので，今後も行列をきちんと勉強した人だけが解けるような良問が出題されることを期待している．

$\boxed{6}$ （50 点）【解答】　　　　　　　　　　　　　　　　配点予想

$$|x(x-2)|+2a|x|-4a|x-2|-1=0 \cdots (*) \text{とする.}$$

$x \geqq 2$ のとき,

$(*)$は $x(x-2)+2ax-4a(x-2)-1=0$ となり,　　5 点

$x=4$ のとき上式は成り立たないから, $x \neq 4$ としてよい.

このとき, $a=\dfrac{x^2-2x-1}{2(x-4)}$ と変形できるから, 右辺を $f_1(x)$ とおく.　　4 点

$0 \leqq x < 2$ のとき, $(*)$は $-x(x-2)+2ax+4a(x-2)-1=0$ となり,　　5 点

$x=\dfrac{4}{3}$のとき上式は成り立たないから, $x \neq \dfrac{4}{3}$ としてよい.

このとき, $a=\dfrac{(x-1)^2}{2(3x-4)}$ と変形できるから, 右辺を $f_2(x)$ とおく.　　4 点

$x<0$ のとき, $(*)$は $x(x-2)-2ax+4a(x-2)-1=0$ となり,　　5 点

$x=4$ のとき上式は成り立たないから, $x \neq 4$ としてよい.

このとき, $a=-\dfrac{x^2-2x-1}{2(x-4)}$ と変形できるから, 右辺は$-f_1(x)$ とおける.　　4 点

以上より, $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & (x \geqq 2 \text{ のとき}) \\ f_2(x) & (0 \leqq x<2 \text{ のとき}) \\ -f_1(x) & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$ とすると,

$f_1{}'(x)=\dfrac{x^2-8x+9}{2(x-4)^2}$ および $f_2{}'(x)=\dfrac{(x-1)(3x-5)}{2(3x-4)^2}$ となるから,　　各 3 点

$f(x)$ の増減および不連続な箇所における極限は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	$4+\sqrt{7}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$		$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	0	↘	$\times$	↘	$\frac{2}{9}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$\times$	↘	$3+\sqrt{7}$	↗

5 点

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{4}{3}-0} f(x)=-\infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{4}{3}+0} f(x)=+\infty$　　4 点

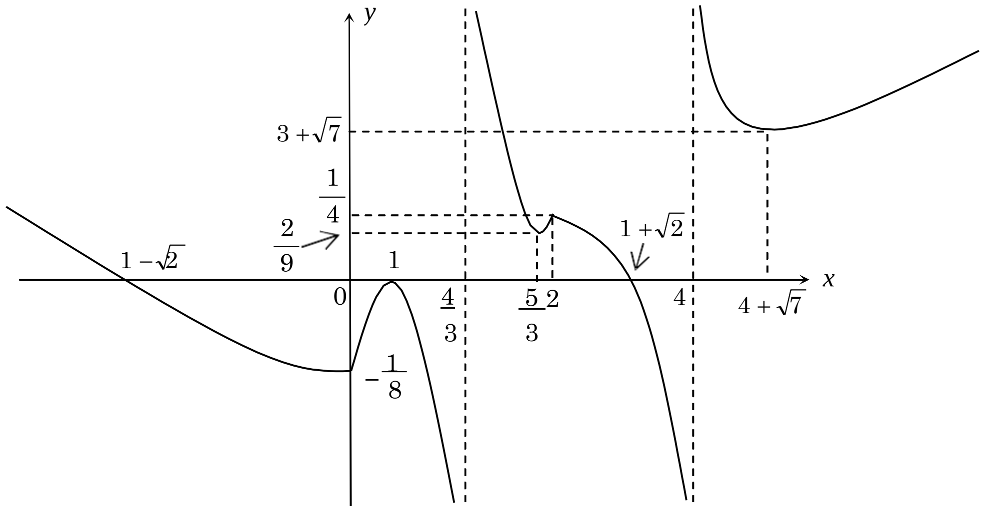
$\displaystyle\lim_{x\to 4-0} f(x)=-\infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to 4+0} f(x)=+\infty$

以上より求める a の範囲は, $-\dfrac{1}{8}<a<0$, $\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{4}$, $3+\sqrt{7}<a \cdots$(答)　　8 点

6 【解説】

x の範囲で場合分けをして，絶対値を外したあとは定数分離法がわかりやすい．

$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる．なお， $y=f_1(x)$ は直線 $y=\frac{1}{2}x+1$ に， $y=-f_1(x)$ は直線 $y=-\frac{1}{2}x-1$ にそれぞれ漸近しているが，見づらくなるので省略した．



実際グラフをかくとなるとなかなか大変である．ここまできたら，このグラフと直線 $y=a$ との共有点が 4 個となるような a の範囲を求めるのは簡単だろう．

また，「直線分離法」を使った別解もある．まず与えられた方程式を次のように変形する．

$$|x(x-2)|-1=2a\left(2|x-2|-|x|\right)$$

これより，右の２つのグラフの共有点の個数で考える．

$$y=|x(x-2)|-1 \quad \cdots ①$$
$$y=2a\left(2|x-2|-|x|\right) \quad \cdots ②$$

②は直線を表すので，傾きを変化させながら①のグラフとの位置関係を求めればよいが，傾きも 通る定点の座標も x の範囲によって変わるので，実際にやってみたが簡単には答を求められないよ うだ．この「直線分離法」はうまく使いこなせない受験生が多いが，2004 年度後期の理系学部の 問題のように，この方法であっさり解けてしまうこともあるので覚えておきたい技である．養賢生 は前期数学ＩＡテキストの第５講で詳しく解説したが，この問題で応用させるのは困難だろう．