２０２１年度 東北大学（理系） 数学解答・解説および配点予想

ここでは理系数学の満点を 300 点満点で考えています。学部学科によっては満点が異なる場合がありますが、採点基準は共通であると考えられます。

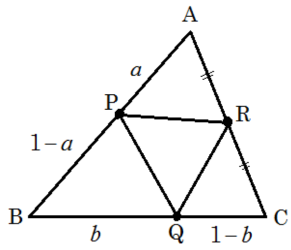
$\boxed{1}$ （50 点）【解答】

文系学部の $\boxed{1}$ と同一ですので，そちらをご覧ください

2 （50 点）【解答】

配点予想

(1)　△PQR＝△ABC－(△APR＋△BPQ＋△CQR)より，



$T=S-\left\{a\cdot\frac{1}{2}+(1-a)b+\frac{1}{2}(1-b)\right\}S$

6 点

$=\left\{1-\frac{a}{2}-(1-a)b-\frac{1}{2}(1-b)\right\}S$

$=\left(\frac{1}{2}+ab-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)S$ となるから， $\frac{T}{S}=\frac{1}{2}+ab-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ …(答)

4 点

(2)　$f(a)=\frac{1}{2}+ab-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ とおくと， $f(a)=\left(b-\frac{1}{2}\right)a+\frac{1}{2}-\frac{b}{2}$ となるから，

$0<b<\frac{1}{2}$ において， $b-\frac{1}{2}<0$ より $f(a)$ は単調減少する。

述べて 5 点

よって $0<a<\frac{1}{2}$ のとき， $f\left(\frac{1}{2}\right)<f(a)<f(0)$ より， $\frac{1}{4}<f(a)<\frac{1}{2}-\frac{b}{2}$

6 点

また $0<b<\frac{1}{2}$ のとき， $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}-\frac{b}{2}<\frac{1}{2}$ であるから， $\frac{1}{4}<f(a)<\frac{1}{2}$

4 点

ゆえに， $\frac{T}{S}$ がとりうる値の範囲は， $\frac{1}{4}<\frac{T}{S}<\frac{1}{2}$ …(答)

5 点

(3)　$\frac{T}{S}=\frac{1}{2}+ab-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{1+2ab-a-b}{2}$ より， $\frac{S}{T}=\frac{2}{1+2ab-a-b}$

よって， $a=\frac{1}{p}$， $b=\frac{1}{q}$ とすると， $\frac{S}{T}=\frac{2}{1+\frac{2}{pq}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}=\frac{2pq}{pq+2-q-p}$

4 点

ここで(2)の結果より $2<\frac{S}{T}<4$ であるから，整数となるとき $\frac{S}{T}=3$ である。

6 点

よって， $\frac{S}{T}=\frac{2pq}{pq+2-q-p}=3$ より， $2pq=3pq+6-3q-3p$

$\Leftrightarrow\quad pq-3q-3p=-6\quad\Leftrightarrow\quad(p-3)(q-3)=3$ …①

4 点

$p-3\geqq 0$， $q-3\geqq 0$ より①をみたす組は$(p-3,\ q-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$
の 2 組であるから，求める$(p,\ q)$の組は $(p,\ q)=(4,\ 6),\ (6,\ 4)$ …(答)

各 3 点

$\boxed{2}$ 【解説】

(1)で求めた $\dfrac{T}{S}=\dfrac{1}{2}+ab-\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}$ は a と b がそれぞれ独立して動くので，(2)ではまず b を固定して a の 1 次関数 $f(a)$ として考えよう。すると直線 $y=f(a)$ の傾きが $b-\dfrac{1}{2}<0$ であるから，単調減少であることが分かる。さらに，$\dfrac{1}{4}<f(a)<\dfrac{1}{2}-\dfrac{b}{2}$ が得られたら右辺の $\dfrac{1}{2}-\dfrac{b}{2}$ がとりうる値の範囲を調べればよい。

(3)は(2)がヒントになっているので，$\dfrac{S}{T}=3$ が得られたら基本的な整数問題となるから，あとは整数(p， q)の組を得るのは容易である。

$\boxed{3}$（50 点）【解答】

文系学部の $\boxed{2}$ と同一ですので，そちらをご覧ください

$\boxed{4}$（50 点）【解答】 　　　　　配点予想

(1)　$y=x^3-2x$ より，接線の傾き $y'=3x^2-2=1$ をみたすのは，$x=\pm1$ のとき　3 点
であるから，題意より点 R の x 座標 a は $1<a$ であることが必要である。　3 点
また，点 R を通る直線 l の方程式は，$y=(x-a)+a^3-2a$ 　$\therefore$ 　$y=x+a^3-3a$　3 点
となるから，曲線 $y=x^3-2x$ と連立させて，$x^3-2x=x+a^3-3a$

$$\Leftrightarrow \quad x^3-3xa-a(a^2-3)=0 \quad \therefore \quad (x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$$　3 点

異なる 2 点 P，Q の x 座標は，$x^2+ax+a^2-3=0\cdots$①の解であるから，
判別式 $D=a^2-4(a^2-3)=3(2+a)(2-a)>0$ より，$1<a<2$ $\cdots$②　4 点

このとき①の 2 解を α，β とおくと，解と係数の関係より $\alpha+\beta=-a$　3 点

よって点 S の x 座標は $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{a}{2}$ であり，点 S は直線 $y=x+a^3-3a$ 上　3 点

にあるからその y 座標は，$y=-\dfrac{a}{2}+a^3-3a=a^3-\dfrac{7}{2}a$ である。　3 点

ゆえに，求める点 S の座標は $\left(-\dfrac{a}{2},\ a^3-\dfrac{7}{2}a\right)$ $\cdots$(答)　3 点

(2)　点 S$(x,\ y)$とおくと，$x=-\dfrac{a}{2}$ かつ $y=a^3-\dfrac{7}{2}a$ となるから，　3 点

$a=-2x$ より a を消去して，$y=(-2x)^3-\dfrac{7}{2}(-2x)=-8x^3+7x$ となる。　3 点

また②より $1<a<2$ であるから，$1<-2x<2$ 　$\therefore$ 　$-1<x<-\dfrac{1}{2}$　3 点

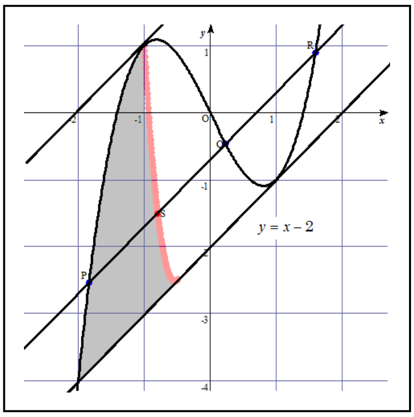
ゆえに求める点 S の軌跡は，3 次曲線 $y=-8x^3+7x$ $\left(-1<x<-\dfrac{1}{2}\right)$ $\cdots$(答)　4 点

(3)　線分 PS が動いてできる領域は，右下図の影をつけた部分であり，
$a=1$ のとき直線 l は $y=x-2$ となるから，求める面積は

$$\int_{-2}^{-1}\left\{x^3-2x-(x-2)\right\}dx+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left\{-8x^3+7x-(x-2)\right\}dx$$　5 点

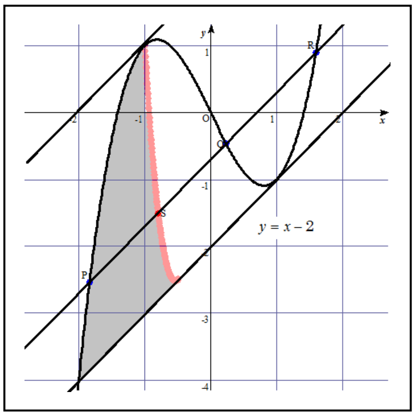
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1}+\left[-2x^4+3x^2+2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{27}{8} \quad \cdots(\text{答})$$　4 点



4 【解説】

グラフを描いて考えていく方がかなり楽になるだろう。まずは点 R の x 座標 a がとりうる値の範囲を求めることが大切である。方程式①の解の範囲だけで考えると分かりにくいので，直線 l を動かしてグラフで考えるとよい。点 S の軌跡は，右図の赤い曲線の一部であるから線分 PS が動いてできる領域も容易に分かる。その面積を求める定積分は，地道に計算するしか方法がないから，慎重に求めるようにしよう。



理系学部の入試問題とはいえ，数学Ⅱの微分積分から出題されることはよくあるので，二つの 3 次関数のグラフをすばやく図示して考えていく能力は必須である。

$\boxed{5}$（50 点）【解答】　　配点予想

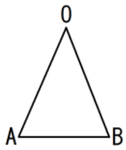
(1)　$z=0$ のとき，3 点 O，A，B は一致するから題意をみたす。　2 点

$z\neq 0$ のとき，題意をみたす条件は，$\dfrac{z^2-0}{z-0}=z$ が実数であることである。　2 点

逆に z が実数であれば，3 点 O，A，B は一致するか，または異なる点が同一直線上にあるので，確かに題意をみたす。　述べて 2 点

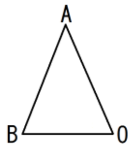
ゆえに，求める必要十分条件は「z が実数である」ことである。 …(答)　3 点

(2)　3 点 O，A，B が三角形の頂点となるための必要条件は，z が実数でないことである。　述べて 2 点



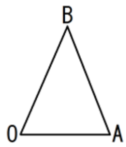
(ⅰ)　OA＝OB のとき，$|z|=|z^2|$　$\Leftrightarrow$　$|z|=|z||z|$

$z\neq 0$ より $|z|\neq 0$ なので上式より，$|z|=1$ …①　4 点



(ⅱ)　OA＝AB のとき，$|z|=|z^2-z|$　$\Leftrightarrow$　$|z|=|z||z-1|$

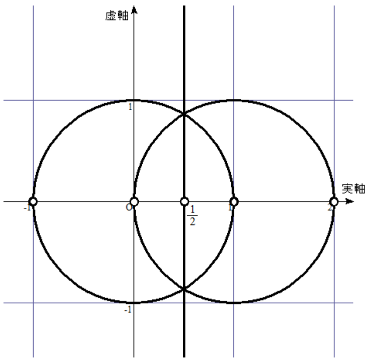
上と同様に $|z|\neq 0$ なので上式より，$|z-1|=1$ …②　4 点



(ⅲ)　OB＝AB のとき，$|z^2|=|z^2-z|$　$\Leftrightarrow$　$|z||z|=|z||z-1|$

上と同様に $|z|\neq 0$ なので上式より，$|z|=|z-1|$ …③　4 点

ゆえに①または②または③をみたし，かつ実数でない複素数 z 全体は右図の太線部分となる（白丸を除く） …(答)　図に 3 点



(3)　$\arg z=\theta$ より，$\arg z^2=2\theta$ であるから，$\angle \mathrm{AOB}=\theta$ であり，(2)の結果より $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ である。　2 点

(ⅰ)　OA＝OB のとき，$|z|=1$ より，

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}|z||z^2|\cdot\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}|z|^3\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sin\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　（$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大）　2 点

(ⅱ)　OA＝AB のとき，$|z|=r$ とすると，$|z-1|=1$ より $r=2\cos\theta$ をみたし，　3 点

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}|z|^3\sin\theta=\dfrac{1}{2}r^3\sin\theta=4\cos^3\theta\sin\theta$　2 点

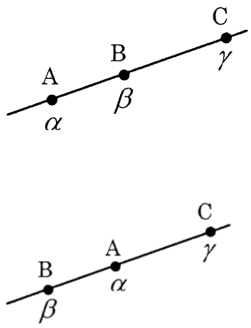
（$=f(\theta)$ とおく）

	配点予想
$f'(\theta)=4(-3\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^4\theta)=4\left\{-3\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+\cos^4\theta\right\}$ $=4(4\cos^2\theta-3)\cos^2\theta$	2 点
よって，$f'(\theta)=0$ のとき，$4\cos^2\theta-3=0$　$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$	
したがって，右の増減表より， $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	増減表に 3 点
(iii)　OB＝AB のとき，$\lvert z\rvert=r$ とすると z の実部 $r\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ より，$r=\dfrac{1}{2\cos\theta}$	2 点
$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\lvert z\rvert^3\sin\theta=\dfrac{1}{2}r^3\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{16\cos^3\theta}$ $=\dfrac{(1+\tan^2\theta)\tan\theta}{16}\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　（$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大）	2 点
以上より (ii) のとき最大で，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$r=2\cos\theta=\sqrt{3}$ となるから，	2 点
$z=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}$　のとき，最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　…(答)	各 2 点

増減表:

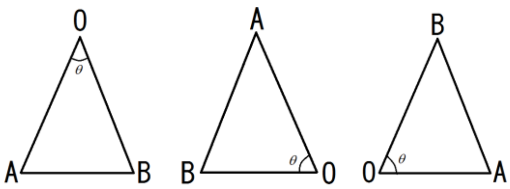
θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

$\boxed{5}$ 【解説】



複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ が一直線上に並ぶとき $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数である。なぜなら $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の絶対値は AB と AC の長さの比を表し，その偏角は∠BAC の大きさを表しているので，偏角が 0 または π であれば，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数となるからである。

(1)で三角形 OAB ができない場合を考えたので，(2)(3)では z は実数でないことに注意しよう。実は(2)のような問題は入試定番で，古くは 1999 年度日本女子大学や 2004 年度一橋大学などでも出題されている。（2005 年度までは複素数平面は数学 B だったので文系学部でも出題された）



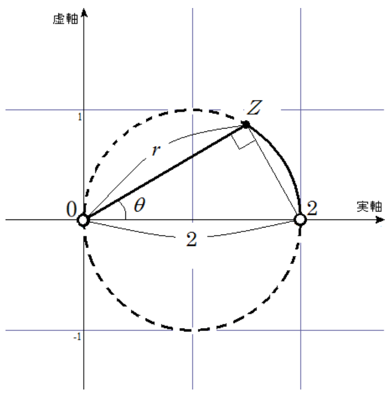
(3)では，$OA=|z|=r$ とすると，

$$OB=|z^2|=|z||z|=r^2 \text{ であり，}$$

$$\angle AOB=\arg\frac{z^2-0}{z-0}=\arg z=\theta$$

となるから，△OAB の面積はいずれの場合も $\dfrac{1}{2}r^3\sin\theta$ となる。

(ｉ)では $r=1$ であるから最も易しいが，(2)(3)では数学Ⅲの極座標と極方程式の考え方も併用していくことになる。
(2)は複素数平面上の点 0 を極とし，実軸正方向を始線として，極座標(1，0)を中心とする直径 2 の円の極方程式 $r=2\cos\theta$ を用いる。この式は高校の参考書では，カージオイドの極方程式 $r=2(1+\cos\theta)$ と同時に提示されていることが多いが，目立たないので意外と知られていないようだ。
(3)では，$z=x+yi$ の実部 $x=r\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ より，r を消去していけばよい。ここでも極座標の考え方が役に立つ。



上の直角三角形において，
常に $r=2\cos\theta$ をみたす

数学Ⅲの教科書の「複素数平面」における極形式と，「式と曲線」における極座標および極方程式の考え方は本質的に全く同じであることは理解していると思うが，それらを併用して解く本問は単元ごとに別々に学習しているだけの受験生にとってはなかなか手強い問題だったに違いない。

$\boxed{6}$ (50 点)【解答】　　　　配点予想

(1) $I_n=\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$ とおくと，部分積分法より，

$I_1=\displaystyle\int_0^a (a-x)e^x\,dx=\Big[(a-x)e^x\Big]_0^a+\int_0^a e^x\,dx=-a+\Big[e^x\Big]_0^a=e^a-1-a$ であり，　2 点

$I_n=\left[\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^x\right]_0^a+\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^x\,dx=-\frac{a^n}{n!}+I_{n-1}$ より，$\dfrac{a^n}{n!}=I_{n-1}-I_n$　3 点

$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として辺々和をとって，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{a^k}{k!}=\sum_{k=2}^{n}\left(I_{k-1}-I_k\right)$　2 点

これより，$\dfrac{a^2}{2!}+\dfrac{a^3}{3!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}=I_1-I_2+I_2-I_3+\cdots+I_{n-1}-I_n$

$=I_1-I_n=e^a-1-a-I_n$ となるから，　4 点

$e^a=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\dfrac{a^3}{3!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}+I_n$ となって与式は成り立つ。(証明終)　3 点

(2) $0\leqq x\leqq a$ において，$e>1$ より $1\leqq e^x\leqq e^a$ であるから，　2 点

$\dfrac{(a-x)^n}{n!}\geqq 0$ より，$\dfrac{(a-x)^n}{n!}\leqq\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^a$ が成り立つ。　4 点

よって，両辺を区間 $[0,\ a]$ で定積分すると，

$$\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}\,dx\leqq\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^a\,dx\quad\cdots①$$
2 点

ここで左辺は，$\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}\,dx=\left[-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ となり，　3 点

また右辺は，$\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^a\,dx=\left[-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^a\right]_0^a=\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$ となるから，　3 点

①より，$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\displaystyle\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$ は成り立つ。(証明終)　3 点

(3) (1)の等式において $a=1$ とすると，

$e-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)=\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx$ であり，　3 点

(2)の不等式において $a=1$ とすると，

$\dfrac{1}{(n+1)!}\leqq\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e}{(n+1)!}$ となるから，　3 点

$\dfrac{1}{(n+1)!}\leqq e-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)\leqq\dfrac{e}{(n+1)!}$ が成り立つ。　3 点

	配点予想
したがって， $\left\| e-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)\right\| \leqq \dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{1}{1000} = 10^{-3}$ …② をみたす最小の正の整数 n を求めればよい。	4 点
n が増加すると $\dfrac{e}{(n+1)!}$ は減少することに注意して， $2<e<3$ を用いると， $n=5$ のとき， $\dfrac{e}{(n+1)!}=\dfrac{e}{6!}<\dfrac{3}{720}>\dfrac{1}{1000}$ であるが， $n=6$ のとき， $\dfrac{e}{(n+1)!}=\dfrac{e}{7!}<\dfrac{3}{5040}<\dfrac{1}{1000}$ となるから②をみたす。	述べて 4 点
以上より求める最小の正の整数 n は， $n=6$ である。 …(答)	2 点

6 【解説】

(1)の証明は，$f_n(a)=e^a-\left(1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}+I_n\right)$ とおいて，すべての正の整数 n について，$f_n(a)=0$ となることを，次のように数学的帰納法を用いて証明することもできる。

（ⅰ） $n=1$ のとき，$f_1(a)=e^a-(1+a+I_1)=e^a-(1+a+e^a-1-a)=0$ より成り立つ。

（ⅱ） $n=k\ (k\geqq 1)$ のとき，$f_k(a)=e^a-\left(1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^k}{k!}+I_k\right)=0$ であると仮定すると，

$$\begin{aligned}f_{k+1}(a)&=e^a-\left(1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^k}{k!}+\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}+I_{k+1}\right)\\&=e^a-\left(1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^k}{k!}+\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}-\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}+I_k\right)\\&=f_k(a)=0\end{aligned}$$

となるから，$n=k+1$ のときも成り立つ。

以上(ⅰ)(ⅱ)よりすべての正の整数 n について，$f_n(a)=0$ は成り立つ。 (証明終)

いずれにしても，【解答】(1)の初めの３行は必要になるので求めておくべきである。

本問の(1)の等式は，e^x のような特殊関数を，

$$e^x=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

のように $x=0$ 付近における整関数の無限級数によって近似的に表せることを意味していて，考案したスコットランドの数学者コリン・マクローリン（Colin Maclaurin：1698～1746 年）の名前に因んで「マクローリン展開」という。(上式の x を a に，t を x に置き換えてから本問を見返してみよう。なお，右の QR コードをスマホで読み取ると，上式をグラフで理解するための web サイトが見られます)

また定積分 I_n は，e^x をマクローリン展開した式における「近似の誤差」を表しているので，

このような定積分 I_n を「マクローリン展開の積分剰余項（せきぶんじょうよこう）」という。

したがって本問の(3)では，その近似の誤差が 1000 分の 1 未満になるような正の整数 n を求めているので，$e-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{6!}\right)<\dfrac{1}{1000}$ となっていることが分かる。

実際に計算すると，$1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{6!}=2.71805\cdots\cdots$ であるから，

自然対数の底 e の値 $e=2.71828\ \cdots\cdots$ との誤差が 1000 分の 1 未満になっている。

「マクローリン展開」および「マクローリン展開の積分剰余項」についての詳しい解説は，冬期講習テキスト「超難関大数学Ⅲ」テキストの 12,13,16,17 ページを参照するとよい。