2021 年度　東北医科薬科大学　数学　解答速報(1 月 23 日実施分)
医学部

解答番号	Ⅰ	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ		
		2	5	2	1	1	1	1	2	1	2	1	6		
	Ⅱ	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
		4	6	5	2	1	1	8	9	1	0	2	3	4	0
		ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ			
答		5	6	0	0	8	0	9	3	6	8	0			
	Ⅲ	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
		ー	1	8	2	4	1	2	7	1	2	1	1	1	2
		ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ							
		4	1	1	2	2	2	7							

講評

概ね易化。ⅱの（３）（４）の数値計算は受験生泣かせ。知識があれば満点可能で、適度に差がつくと思われる。6 割 5 分は欲しい。

解説

[Ⅰ]

(1)　$S_2 = \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{n} k\sin kx\right) dx = \int_0^\pi (\sin x + 2\sin 2x)\,dx = [-\cos x - \cos 2x]_0^\pi = 2$

$$T_2 = \int_0^\pi (\sin x + 2\sin 2x)^2 = \int_0^\pi (\sin^2 x + 4\sin x\cos 2x + 4\sin^2 2x)\,dx$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{1-\cos 4x}{2} + 4\left\{-\frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x)\right\} + 4\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}\right] dx$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{5}{2} + 2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\cos 3x - 2\cos 4x\right) dx$$

$$= \left[\frac{5}{2}x + 2\sin x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x\right]_0^\pi = \frac{5}{2}\pi$$

(2) $S_n=\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}k\sin kx\right)\mathrm{dx}=\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\pi}k\sin kx\,dx\right)=\sum_{k=1}^{n}(-\cos k\pi+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}+n$$

n が偶数のとき　$S_n=0+n=n$　　n が偶数のとき　$S_n=n+1$

(3) $T_n=\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}k\sin kx\right)^2dx=\int_0^{\pi}(\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+n\sin nx)^2\,dx$

$$=\int_0^{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{n}(k\sin kx)^2+2\sum_{i\neq j}(ij\sin ix\sin jx)\right\}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\int_0^{\pi}\sin^2 kx dx\right)+2\sum_{i\neq j}\left(ij\int_0^{\pi}\sin ix\sin jx\,dx\right)$$

+

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{k^2\int_0^{\pi}(1-\cos 2kx)dx\right\}-\sum_{i\neq j}\left[ij\int_0^{\pi}\{\cos(i+j)x-\cos(i-j)x\}\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\left[x-\frac{1}{2}\sin 2kx\right]_0^{\pi}\right)-\sum_{i\neq j}\left[ij\int_0^{\pi}\left\{\frac{\sin(i+j)x}{i+j}-\frac{\sin(i-j)x}{i-j}\right\}dx\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{\pi}{12}n(n+1)(2n+1)$$

(4) (ⅰ) n が偶数のとき

$$\frac{{S_n}^3}{T_n}=\frac{n^3}{\frac{\pi}{12}n(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{\frac{\pi}{12}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}\to\frac{6}{\pi}(n\to\infty)$$

(ⅱ) n が奇数のとき

$$\frac{{S_n}^3}{T_n}=\frac{(n+1)^3}{\frac{\pi}{12}n(n+1)(2n+1)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{\frac{\pi}{12}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}\to\frac{6}{\pi}(n\to\infty)$$

(ⅰ)(ⅱ)より

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{{S_n}^3}{T_n} = \dfrac{6}{\pi}$

[Ⅱ]

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} a_k = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 31 = 465$

(2) 一般的に、$0 < \ell < m_1$ 、$0 < p_1 < p_2$ のとき、

$\ell p_2 + mp_1 < \ell p_1 + mp_2$

が成り立つ

(3) (2)より $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} kb_k$ が最小のとき、

$b_n = 60 + (n-1)\cdot(-1) = 61 - n$

$$\sum_{k=1}^{30} kb_k = \sum_{k=1}^{30} k(61-k) = \sum_{k=1}^{30}(61k - k^2) = 61\cdot 465 - \frac{1}{6}\cdot 30\cdot 31\cdot 61 = 18910$$

同様に(2)より $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} kb_k$ が最小のとき、

$b_n = 31 + (n-1)\cdot 1 = n + 30$

$$\sum_{k=1}^{30} kb_k = \sum_{k=1}^{30} k(k+30) = \sum_{k=1}^{30}(k^2 * 30k) = \frac{1}{6}\cdot 30\cdot 31\cdot 61 + 30\cdot 465 = 23405$$

(3)と同様に $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} ka_k$ が最小のとき、

$a_n = 30 + (n-1)\cdot(-1) = 31 - n$

同様に $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} ka_k$ が最小のとき、

$$\sum_{k=1}^{30} ka_k c_k \geq \sum_{k=1}^{15} k(31-k)\left[\{30 + (k-1)\cdot(-2)\} + \{29 + (k-1)\cdot(-2)\}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{15} k(31-k)(63-4k)=\sum_{k=1}^{15}(-4k^3+187k^2-1953k)$$

$$=-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 15^2\cdot 16^2+187\cdot\frac{1}{6}\cdot 15\cdot 16\cdot 31-1953\cdot\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16=60080$$

$$\sum_{k=1}^{30} ka_k c_k \leq \sum_{k=1}^{15} k(31-k)\{(2k-1)+2k\}=\sum_{k=1}^{15} k(31-k)(4k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{15}(-4k^3+125k^2-31k)$$

$$=-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 15^2\cdot 16^2+125\cdot\frac{1}{6}\cdot 15\cdot 16\cdot 31-31\cdot\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16=93680$$

[Ⅲ]

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^3=\frac{3}{4}$ 　 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$ 　 $\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=t^2$ 　 $\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$

$$f(\theta)=(3\sin\theta-4\sin^3\theta)-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-8\sin\theta\cos\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)-2$$

$$=-4(\sin^3\theta+\cos^3\theta)+5(\sin\theta+\cos\theta)-8\sin\theta\cos\theta-2$$

$$=-4(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)+5(\sin\theta+\cos\theta)-8\sin\theta\cos\theta-2$$

$$=-4t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)+5t-4(t^2-1)-2$$

$$=2t^3-4t^2-t+2$$

(3) $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 　 $(-1\leq t\leq\sqrt{2})$

$f(\theta)=2t^3-4t^2-t+2=(t-2)(2t^2-1)=0$ 　 $t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 　 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{4}\leq\theta+\frac{\pi}{4}\leq\frac{5}{4}\pi$ より 　 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi,\frac{7}{6}\pi$ 　 $\theta=\frac{7}{12}\pi,\frac{11}{12}\pi$

(4) $g(t)=2t^3-4t^2-t+2$ 　とおくと

$g'(t) = 6t^2 - 8t - 1$　　　$g'(t) = 0$ とすると、$t = \dfrac{4 - \sqrt{22}}{6}$

$g'(t) = (6t^2 - 8t - 1)\left(\dfrac{1}{3}t - \dfrac{2}{9}\right) - \dfrac{22}{9}t + \dfrac{16}{9}$

最大値は、$g\left(\dfrac{4 - \sqrt{22}}{6}\right) = -\dfrac{22}{9} \cdot \dfrac{4 - \sqrt{22}}{6} + \dfrac{16}{9} = \dfrac{4 + 11\sqrt{2}}{27}$